Со[illegible]щенія [illegible]тики

Часть перьвая,

содержащая

начальныя основанія

ариѳметики, геометріи

и тригонометріи,

сочиненная

Академіи Наукъ Адъюнктомъ

Степаномъ Румовскимъ.

Въ Санктпетербургѣ

При Императорской Академіи Наукъ

1760 году.

ЕГО ЯСНЕВЕЛЬМОЖНОСТИ

МАЛОРОССІЙСКОМУ ГЕТМАНУ,

ЕЯ ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА

ДѢЙСТВИТЕЛЬНОМУ КАМЕРГЕРУ,

АКАДЕМІИ НАУКЪ

ПРЕЗИДЕНТУ,

Лейбгвардіи Измайловскаго полку

ПОДПОЛКОВНИКУ,

Орденовъ святаго Андрея, бѣлаго Орла, святаго Александра и святыя Анны

КАВАЛЕРУ,

Лондонскаго ученаго собранія и берлинской Академіи Наукъ

ЧЛЕНУ,

СІЯТЕЛЬНѢЙШЕМУ ГРАФУ

КИРИЛУ ГРИГОРЬЕВИЧУ

РАЗУМОВСКОМУ

МИЛОСТИВОМУ ГОСУДАРЮ!

СІЯТЕЛЬНѢЙШІЙ ГРАФЪ.

МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ!

Должность моя, и природное Особѣ Вашей великодушіе, съ которымъ принимаете труды наши, произвели во мнѣ смѣлость первой опытъ моихъ трудовъ приписать Вашему Сіятельству, какъ начальнику моего благополучія.

За верьхъ щастія почитать долженъ, ежели мой трудъ милостиваго прїятїя удостоится, которой съ тѣмъ намѣренїемъ приносится, чтобъ увѣрить Ваше Сїятельство, съ какимъ высокопочитанїемъ и преданностїю имѣю честь быть

СІЯТЕЛЬНѢЙШІЙ ГРАФЪ

МИЛОСТИВЫЙ ГОСУДАРЬ!

ВАШЕГО СІЯТЕЛЬСТВА

всепокорнымъ и вѣрнымъ слугою
Степанъ Румовской.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Недостатокъ на Россійскомъ языкѣ до наукъ касающихся книгъ должно почитать за великое препятствіе разпространенію оныхъ въ Россіи. Вмѣсто того чтобъ съ молодыхъ лѣтъ упражняться въ наукахъ, и острить разумъ, напередъ принуждены бываемъ самое лучшее время употребить на изъученіе какого нибудь языка, къ чему ничего кромѣ памяти не требуется, а силы разума коснѣютъ, и въ полномъ возрастѣ къ наукамъ и важнымъ употребленіямъ, гдѣ долговременное требуется разсужденіе, бываютъ неспособными.

Когда мнѣ за нѣсколько назадъ времени повелѣно было читать на Россійскомъ языкѣ Математической Курсъ, то я пользуясь симъ случаемъ, принялъ намѣреніе наградить нѣкоторымъ сей недостатокъ въ разсужденіи Математики, и сочинилъ перьвую часть сокращенія Математическаго, которую благосклонному читателю здѣсь представляю.

При сочиненіи сей части, слѣдовалъ я больше порядку, которой Г. *Сегнеръ* наблюдалъ въ основаніяхъ Ариѳметики и Геометріи, и во первыхъ старался, чтобъ книга сія не была ни коротка, ни пространна, дабы начинающему учиться юношеству между протчими полезными упражненіями, можно было наставленія преподавать и въ Математическихъ наукахъ на природномъ языкѣ. Но не тщетно ли мое въ разсужденіи краткости и пространства стараніе было, безпристрастному Читателю лучше разсудить, и погрѣшности видѣть можно, нежели самому сочинителю. И ежели кто найдетъ здѣсь какіе недостатки, тотъ можетъ извинить ихъ тѣмъ, что сей есть перьвой мой трудъ, которой въ свѣтъ издается; а всякаго дѣла начало рѣдко бываетъ совершенно.

Два рода видимъ издаваемыхъ Математическихъ книгъ. Въ иныхъ содержатся правила безъ доказательствъ, и изъясняются одними примѣрами, а въ иныхъ сверьхъ того доказательства, и всякаго дѣйствія причины предлагаются. При перьвомъ взглядѣ кажется, что начинающему учиться юношеству по слабости разума, больше пользы принесть можетъ употребленіе такихъ книгъ, въ которыхъ содержатся одни правила, и изъяснены примѣрами. Но долговременное

иску-

искуство, и самое разсужденіе противное сему доказываютъ.

Строгость Математическая, которая состоитъ въ томъ, чтобъ ничего кромѣ извѣстнаго, и ясно доказаннаго за основаніе не принимать, нечувствительно пріучаетъ разсуждать о вещахъ твердо и основательно. Древніе Философы незнающимъ началъ Математическихъ, то есть Ариѳметики и Геометріи, не дозволяли пользоваться своими наставленіями, вѣдая сколько науки Математическія остpятъ, и пріуготовляютъ разумъ къ познанію высокихъ вещей. Изъ сего заключить можно, что начинающимъ учиться полезнѣе предлагать Математическія науки по такой книгѣ, гдѣ строгость и порядокъ Математической наблюдаются.

Чтобъ показать, коимъ образомъ отъ упражненія въ Математикѣ раждается способность къ твердымъ разсужденіямъ, лучшаго способа ненахожу, какъ кратко изъяснить, въ чемъ состоитъ порядокъ Математической.

Въ предложеніи Математическимъ образомъ истиннѣ начало дѣлается отъ понятій самыхъ простыхъ и извѣстныхъ, и для того во первыхъ предлагаются *Опредѣленія* (Definitiones) содержащія въ себѣ ясныя о предлагаемыхъ вещахъ понятія, или изъясненія, что чрезъ то или другое

слово разумѣть должно, дабы подъ однимъ именемъ не разумѣть различныхъ вещей. Потóмъ полагаются *Аксіомы* (Axiomata) такія предложенія, которыя никакого доказательства не требуютъ, и которыхъ истинна сама сабою видна. Какъ напримѣръ два количества, которыя равны третьему, суть равны между собою, или въ мѣсто всякаго количества другое ему равное въ счисленіи принять можно.

Отъ подобныхъ началъ какъ по степени Математики поступаютъ къ труднѣйшимъ понятіямъ, и ничего что неясно или не доказано за основаніе не принимаютъ. Когда отъ соединенія многихъ опредѣленій, и аксіомъ заключается что нибудь такое, чего бы изъ одного опредѣленія или аксіомы заключить не можно было, такія предложенія называются *Теоремы* (Theoremata). Всякая теорема состоитъ изъ предложенія и доказательства. Въ предложеніи изъясняется, что какой нибудь вещи приличествуетъ, или не приличествуетъ, а въ доказательствѣ должны содержаться причины, для чего то или другое оной вещи приличествуетъ. Доказательства не иное что суть, какъ связь силлогисмовъ, въ которыхъ иногда посылки опускаются, но прилѣжно разсуждающему сами встрѣчаются,

или

или ссылками на предъидущіе параграфы на память приводятся, такЪ чтобЪ между тЂмЪ, что доказывается, и между силлогисмами безпрерывной союзЪ наблюдаемЪ былЪ.

Задачи [Problemata] называются, такія предложенія, вЪ которыхЪ требуется что нибудь здЂлать, и состоятЪ изЪ предложенія, рЂшенія и доказательства. ВЪ предложеніи предписывается что здЂлать должно, рЂшеніе содержитЪ дЂйствія, какія кЪ нахожденію того, что требуется, употреблять надлежитЪ, а доказательство притчины показываетЪ, для чего найдется искомое, ежели то, что вЪ рЂшеніи предписано, учинено будетЪ.

ЧтобЪ число опредЂленій, теоремЪ и задачь не умножалось, иногда изЪ оныхЪ выводятЪ предложенія, которыхЪ истинна изЪ предЪидущихЪ сама собою видна, и называются *СлЂдствія* (Corollaria). Что можетЪ служить кЪ изЪясненію предлагаемыхЪ вещей, то обыкновенно включается вЪ примЂчаніяхЪ.

ИзЪ сего краткаго описанія порядку Математическаго явствуетЪ, что ежели кто упражняясь вЪ МатематикЂ привыкнетЪ мысли свои и разсужденія такЪ располагать, чтобЪ ничего неизвЂстнаго, неяснаго и безЪ доказательства не утверждать,

ждать, то разсуждая и о другихъ вещахъ томужъ порядку послѣдовать будетъ, для того что привычка есть другая природа.

Къ подтвержденію сей истинны присовокуплю здѣсь слова славнаго *Локка*, которой говоритъ: *Я выше сего упомянулъ, что Математическія науки весьма способны къ пріученію разума къ твердымъ и основательнымъ разсужденіямъ. Сіе я сказалъ не въ такомъ смыслѣ, чтобъ всякому надлежало быть Математикомъ*: *но когда кто обучаясь Математикѣ получитъ способность разсуждать порядочно, то томуже порядку послѣдовать будетъ и въ разсужденіяхъ о другихъ вещахъ.*

Сверьхъ порядку Математическаго, и различность матерій въ Математикѣ предлагаемыхъ подаетъ случай къ изощренію разума. Сіе мѣсто почитаю я за пристойное предложить читателю, изъ какихъ частей состоитъ Математика,

Между различными тѣлъ свойствами первое, которое чувствамъ нашимъ подвержено, и безъ котораго другія едва съ тѣломъ сопряжены быть могутъ, есть протяженіе тѣлъ. Всякому видно, что протяженія могутъ быть различнаго роду, которыя, хотя отъ тѣлъ не отдѣлимы, однакожъ для способности разумъ человѣческой долженъ былъ отъ тѣлъ отличать, и о каждомъ разсуждая особливо, свойства

ихъ опредѣлять. По протяженіи тѣлъ во-первыхъ взору человѣческому представляется множество ихъ, котораго ни коимъ образомъ вообразить не можно безъ того, чтобъ вкупѣ не вообразить и пространства, которое когда человѣкъ на части раздѣлять и ихъ между собою сравнивать будетъ, то и число себѣ вообразить долженъ. Отъ количества на большее или меньшее число частей раздѣленнаго произошла *Ариѳметика*, а отъ пространства предѣлы имѣющаго, и на части дѣлимаго начало свое получила *Геометрїя*, двѣ части Математики, которыя въ точности предъ всѣми протчими имѣютъ преимущество.

Человѣкъ по изслѣдованіи свойствъ чиселъ и протяженія, или по врожденному любопытству, или по необходимости для облегченія своихъ нуждъ, разсуждая о тѣлахъ, во первыхъ примѣчаетъ движеніе ихъ, откуду нужнѣйшая и полезнѣйшая для общества наука, начало свое получить должна была *Механика*. Въ тѣлѣ, по елику оно къ движенію способность имѣетъ, можно различать, или стремленіе его къ движенію какою нибудь силою уничтоженное, или самое онаго движеніе. Отъ перьваго произходитъ *Статика*, которая по раздѣленію тѣлъ на твердыя и жидкія

раздѣ-

раздѣляется на *Статику* собственно называемую, или науку о равновѣсіи твердыхъ тѣлъ, и на *Гидростатику* о равновѣсіи жидкихъ. А когда человѣкъ разсуждать началъ о дѣйствительномъ тѣлъ движеніи, то произошла *Динамика*, которая также по раздѣленію тѣлъ на твердыя и жидкія раздѣляется на *Динамику и Гидродинамику*. Отъ Динамики на конецъ множество другихъ произошло, изъ которыхъ объ одной мореплавательной наукѣ, по елику она есть искуство, въ движеніе приводить и управлять корабли посредствомъ Механическихъ силъ, упомянуть довольно.

По изобрѣтеніи началъ сихъ нужныхъ и полезныхъ знаній, ничто больше разумъ человѣческой плѣнить и удивить не могло, какъ порядочное движеніе звѣздъ, и для того человѣкъ пользуясь изобрѣтеніями къ благосостоянію своему потребными, сперьва, по одному любопытству долженъ былъ возвесть взоръ свой на небо, и испытать движеніе свѣтилъ небесныхъ. Откуду должна была произойти *Астрономія*, отъ которой на послѣдокъ начало свое получила *Географія*, знаніе опредѣлять фигуру землѝ и взаимное положеніе мѣстъ на поверьхности земной находящихся; *Мореплаваніе*, по елику оно показываетъ средства направ-

ляшь

лять по морямъ путь помощію свѣтилъ небесныхъ, и *Хронологія*, которая показываетъ по теченію солнца и луны раздѣлять время.

Лучи простираясь по прямымъ линеямъ и освѣщая тѣла подали случай къ *Оптикѣ*, и отъ главнаго ихъ свойства, чтобъ простираться по прямымъ линеямъ, начало свое получила *Оптика*. Лучи простираются по прямымъ линеямъ пока теченію ихъ ничто не препятствуетъ, но какъ скоро встрѣтятся съ какимъ нибудь тѣломъ, то путь свой перемѣняютъ. Ежели тѣло будетъ темное и непроходимое, то лучи отражаются, или отпрыгиваютъ; ежели прозрачное, то перемѣнивъ путь свой на сквозь проходятъ. Сіи два явленія подали случай къ *Катоптрикѣ* и *Діоптрикѣ*.

Изъ множества другихъ наукъ, между частями Математическими *Музыка* и *Артилерія* по достоинству мѣсто занять могутъ, поелику одна показываетъ притчину согласія различныхъ голосовъ, а другая дѣйствія пороху изчисляетъ. Протчія науки какъ напримѣръ *Фортификація* и *Архитектура гражданская* между частями Математическими вмѣщаемы бываютъ не столько по своему свойству, сколько по произволенію писателя и намѣренію, съ кото-

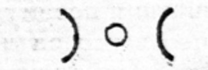
съ которымъ книга издается. Должно думать, что со временемъ число Математическихъ частей еще умножится, ибо у древнихъ Ариѳметика только и Геометрія Математику составляли, а протчія науки тогда ужѐ мѣста сего удостоены, когда начáла ихъ помощію Геометріи до такой ясности доведены, какую имѣютъ самыя Геометрическія истинны. Изъ сего слѣдуетъ, что числá Математическихъ частей опредѣлить не можно. Чѣмъ больше въ Физикѣ открыто будетъ неоспоримыхъ истиннъ, которыя бы могли служить основаніемъ, тѣмъ больше Математика разпространится. Сіе предвидя *Баконъ* сказалъ: *Когда Физика день отъ дня новыя приращенія получая, новыя Аксіомы изобрѣтать будетъ, то и число Математическихъ частей умножится.*

Изъ сего видно, сколь пространно поле Математики, и сколь нужна Ариѳметика и Геометрія къ пріобрѣтенію знанія другихъ частей Математическихъ. Но чтобъ не оставить начальнѣйшей въ нынѣшнія времена части Математической, которой изобрѣтеніе больше всѣхъ чести разуму человѣческому приноситъ, которой всѣ Математическія науки совершенствомъ своимъ

имъ должны , упомянуть я долженъ объ *Алгебрѣ*. Трудно и почти не возможно здѣсь описать въ чемъ Алгебра состоитъ : Иные называютъ ее наукою изчисленія дѣлать помощію знаковъ, но сіе описаніе не подаетъ яснаго понятія объ Алгебрѣ вообще взятой. Произхожденія ея не можно лучше представить, какъ ежели Ариѳметику и Геометрію сравнимъ съ двумя рѣками, изъ которыхъ каждая съ начала имѣя особливое теченіе , напослѣдокъ соединившись составили одну , которая пространствомъ , стремленіемъ и глубиною несравненно прежнихъ превосходитъ.

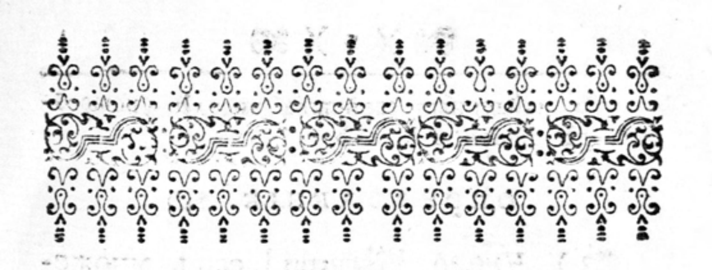
Хотя Математика предъ всѣми науками въ точности преимущество имѣетъ , и знаніе перьвыхъ ея частей всякому почти не обходимо нужно , однакожъ сіе въ ней почитать должно за нѣкоторую неспособность , что начала ея по большой части суть такого свойства , что не видно употребленія оныхъ , и въ начинающихъ учиться при самомъ вступленіи отвращеніе производятъ. По сему могъ бы кто винить Математиковъ , что они не стараются о изобрѣтеніи другаго способа , къ познанію Математическихъ истиннъ; но въ разсужденіи сего оправдать ихъ можетъ Евклидовъ

отвѣтъ, которой онъ далъ своему Государю. Когда *Птоломей* у *Евклида* спросилъ, нѣтъ ли другаго пути къ познанію Математики, которой бы не такъ былъ труденъ какъ обыкновенной; тогда отвѣтствовалъ *Евклидъ*: *Нѣтъ и для Государей особливаго и способнѣйшаго пути къ познанію Математики.* Въ протчемъ почитая за излишнее дѣло пространно доказывать пользу Математики, тѣмъ сіе заключу, что въ общемъ житіи ничего безъ познанія величины и количества въ пользу нашу употребить не можемъ, которое отъ одной Математики заимствовать должно.



НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

АРИѲМЕТИКИ.



ГЛАВА ПЕРЬВАЯ.

О ЦѢЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 1.

1.

А*риѳметика* есть наука, которая показываетъ свойства чиселъ, и подаетъ правила къ рѣшенію случающихся въ общемъ житіи задачъ.

Примѣчаніе 1.

2) Ариѳметика, какъ и всѣ другія науки, раздѣляется на двѣ части на Теоретическую и Практическую. Въ Теоретической предлагаются однѣ свойства чиселъ, и все, что изъ свойствъ ихъ слѣдуетъ. А Практическая показываетъ способы, какъ

должно найденныя свойства чиселъ употреблять къ рѣшенїю задачъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 2.

3) *Число* [Numerus] есть множество частей одинакаго роду вмѣстѣ взятыхъ: всякая изъ нихъ называется *единица* [Vnitas.]

Слѣдствїе.

4) По сему всякое число должно относиться къ извѣстной единицѣ; и понеже число есть множество единицъ, то оно увеличиться и уменьшиться можетъ. Увеличится тогда, когда къ нему нѣсколько единицъ тогожъ роду придано будетъ. Уменьшится напротивъ того, когда отъ него нѣсколько единицъ отъимется.

Примѣчанїе.

5) Во всѣхъ счисленїяхъ или измѣренїяхъ беремъ нѣкоторую мѣру за единицу, и ищемъ, сколько разъ она въ предложенной величинѣ или количествѣ содержится. Мѣра и сама можетъ быть величина или количество, отъ какой нибудь единицы зависящее. Множество найденныхъ мѣръ называется число

опре-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

6) Когда принятая къ счисленію единица A нѣсколько разъ повторенная равна будетъ совершенно предложенной величинѣ B, то сіе число единицъ называется *цѣлое число.* А ежели единица A будетъ и сама какъ величина изъ единицъ состоящая, то она называется *часть на цѣло дѣлящая* [pars aliquota] величины B.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

7) Когда не сама единица, но ея часть какая нибудь на цѣло дѣлящая повторена будетъ, и уравнится предложенной величинѣ, число повторенныхъ частей называется *ломаное число* или *дробь* (Numerus fractus или fractio).

Примѣчаніе.

8) Ежели единица нѣсколько разъ повторенная уравняется съ данною величиною, то и часть такой единицы на цѣло дѣлящая можетъ уравниться той же величинѣ, когда она нѣсколько разъ повторится. Слѣдовательно всякая величина цѣлыми числами изображенная можетъ быть изображена раз-

личными образами чрезъ ломаныя числа. Величина ломанымъ числомъ изображенная можетъ быть больше единицы, меньше единицы, и равна единицѣ.

Опредѣленіе 5.

9) Ломаное число или дробь состоитъ изъ двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно показываетъ, на сколько частей единица раздѣляется, и называется *Знаменатель*; а другое, которое показываетъ, сколько частей, на которыя единица раздѣлена, къ счисленію берется, называется *Числитель* дроби. Которыя одинакаго имѣютъ знаменателя, или къ той же части единицы относятся, называются дроби *одинакаго знаменателя*.

Примѣчаніе.

10) Дробь изображается поставляя числителя надъ линѣечкою, а знаменателя подъ линѣечкою, какъ напримръ $\frac{3}{4}$, число 3 будетъ числитель, а 4 знаменатель; и ежели бы дробь $\frac{3}{4}$ относилась къ аршину, тобъ она означала, что аршинъ должно раздѣлить на четыре части, и такихъ частей должно взять три. Знаменатель и числи-

числитель обыкновенно бываютъ цѣлыя числа, хотя могутъ быть и сами ломаныя числа.

Слѣдствіе 1.

11) Изъ сихъ свойствъ чиселъ слѣдуетъ, что величина единицы не увеличиваетъ числа. Для лучшаго понятія пусть у меня будетъ восемь маленькихъ шариковъ, а у другаго восемь большихъ. Всякъ можетъ разсудить, что отъ того, что мои единицы, то есть маленькіе шарики меньше, нежели другаго единицы, то есть большіе шары; мое число единицъ не уменьшается, а его не увеличивается.

Слѣдствіе 2.

12) Но величина или количество числомъ изображенное зависитъ отъ числа и отъ величины единицы, къ которой оное относится. Количество какое нибудь не только увеличивается, когда число единицъ умножается, но и тогда, когда единица сама собою увеличивается. Подобнымъ образомъ количество и уменьшается.

Слѣдствіе 3.

13) Дробь или ломаное число обращается въ цѣлое, ежели та часть единицы,

которая своимъ повтореніемъ произвела дробь, возмется за единицу. Слѣдовательно ломаное число больше становится, когда числитель увеличивается; также увеличивается, когда часть единицы больше становится. Подобнымъ образомъ дробь и уменьшается, когда число частей и самая часть единицы убавляется.

Слѣдствіе 4.

14) Слѣдовательно при томъ же числѣ, когда единицы или части единицъ вдвое больше или вдесятеро противъ прежняго увеличатся, то и величина числомъ изображенная вдвое или вдесятеро больше будетъ; напротивъ того, когда при томже числѣ единицы или части единицъ вдвое или вдесятеро уменьшены будутъ, то и величина числомъ изображенная вдвое или въ десять разъ уменьшится.

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

15) *Имѣя способность счесть десять, чтобъ большія числа изображать и выговаривать можно было, обыкновенно десять простыхъ единицъ называемъ* десяткомъ, *десять десятковъ* сотнею, *десять сотенъ означаемъ новою единицею* тысячею.

тысячею. И какъ щитали отъ единицы до тысячи, подобнымъ образомъ щитаемъ отъ тысячи до милліона. Послѣ тысячъ полагаемъ десятки тысячъ, послѣ десятковъ сотни тысячъ, послѣ сотенъ тысячъ десять сотенъ тысячъ, или однимъ словомъ милліонъ, такъ, чтобъ всякая единица вышшей степени составляла десять единицъ послѣдующей.

16) Отъ милліона щитаемъ далѣе, такъ какъ щитали отъ единицы до милліона. Дошедши до милліона, послѣ единицъ милліона полагаемъ десятки милліоновъ, потомъ сотни милліоновъ, тысячи милліоновъ, десятки тысячъ милліоновъ, сотни тысячъ милліоновъ, потомъ десять сотенъ тысячъ милліоновъ, или билліонъ. Подобнымъ образомъ щитаемъ отъ билліона до трилліона, отъ трилліона до квадрилліона, отъ квадрилліона до квинтилліона и далѣе.

17) Когда единица раздѣлится на сколько нибудь равныхъ частей, то одна изъ нихъ называется или половиною, или третью, или

или четвертью, или пятою частью и проч. по числу частей, на сколько единица разделится. Иногда берем десятую, сотенную, тысячную часть единицы, в таком случае последующая часть меньше бывает в десять раз единицы предъидущей, и называются десятичныя части или дроби.

ПОЛОЖЕНІЕ 2.

18) *При счисленіи вышепомянутых чисел больше не употребляется, как десять следующих знаков:*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

которых знаменованіе всякому известно.

Примечаніе.

19) Знаки, которыми числа изображаются, зависят от произволенія. Вышеозначенные для того употребляются, что они издревле приняты, и что способнее их к изображенію чисел не имеем.

ПОЛОЖЕНІЕ 3.

20) *Помянутые знаки не всегда имеют одинакое знаменованіе, истин-*

истинное узнается по мѣсту, которое каждой знакъ занимаетъ. На первомъ мѣстѣ отъ правой руки всякой знакъ имѣетъ свое собственное знаменование. На второмъ мѣстѣ отъ правой руки всякой знакъ въ десять разъ значитъ больше, нежели на первомъ, то есть десятки; на третьемъ мѣстѣ отъ правой руки стоящїе знаки означаютъ сотни, на четвертомъ мѣстѣ единицы тысячь, или тысячи, на пятомъ десятки тысячь, на шестомъ сотни тысячь; на седьмомъ тысячи тысячь или единицы миллїоновъ, такъ чтобъ единица предъидущаго знака дѣлала десять единицъ послѣдующаго.

21) Знакъ, которой стоитъ передъ мѣстомъ, гдѣ стоящее число означаетъ единицы, означаетъ число десятыхъ частей единицы, на второмъ сотенныхъ, на третьемъ тысячныхъ, и такъ далѣе. Мѣсто, гдѣ единицы оканчиваются, означается запятою (,).

22) Знаковъ стоящихъ на седьмомъ мѣстѣ знаменованїе сходствуетъ

ствуетъ съ знаменованiемъ тѣхъ, которые стоятъ на первомъ отъ правой руки, съ тою разностью, что къ знакамъ стоящимъ на седьмомъ мѣстѣ прикладывается слово миллiонъ. Такимже образомъ дѣлается восьмое изъ втораго, девятое изъ третьяго, десятое изъ четвертаго, и прочiе даже до тринатцатаго, прикладывая слово миллiонъ. Знаки стоящiе на тринатцатомъ, четырнатцатомъ, пятнатцатомъ и проч: даже до девятнатцатаго выговариваются такъ какъ тѣ, которые стоятъ на первомъ, второмъ, третьемъ и проч: прикладывая слово билліонъ: Подобнымъ образомъ продолжается наименованiе отъ билліона до трилліона, отъ трилліона до квадрилліона и далѣе.

23) *Ежели какой нибудь степени единицъ не достаетъ, то мѣсто ихъ наполняется знакомъ (0), которой называется нуль.* Напримѣръ, ежели бы сотенныхъ единицъ не было, тооъ на мѣсто ихъ, то есть на третьемъ мѣстѣ отъ правой руки должно было поставить 0 на

на тотъ конецъ, чтобъ всякаго степени единицы стояли на опредѣленныхъ себѣ мѣстахъ.

Слѣдствïе.

24) Понеже знакъ о ничего самъ собою не значитъ, то когда въ какомъ нибудь числѣ опредѣленъ будетъ знакъ единицы означающей, оное число ни увеличится ни уменшится, сколько бы нулей, и съ которой бы стороны ни придано было.

ЗАДАЧА I.

25) *Написанное число выговаривать.*

РѢШЕНIЕ.

Данное число должно раздѣлить на члены, изъ которыхъ каждой долженъ состоять изъ трехъ знаковъ, начиная дѣленïе отъ правой рукй къ лѣвой, не смотря на то, сколько въ послѣднемъ останется. Всякïе три знака должно отдѣлить запятою или точкою: первому знаку послѣ всякихъ двухъ запятыхъ или точекъ надписывать по порядку слѣдующïе знаки:

ки: I, II, III, IV, V и проч: то естьли надъ седьмымъ I, что будетъ означать миллiоны, надъ тринатцатымъ II, что будутъ значить биллiоны, надъ девятнатцатымъ III знакъ триллiоновъ, и такъ далѣе, а точки или запятые безъ сихъ знаковъ будутъ означать тысячи, и такъ по силѣ положенiй

III II I

число 5.431.863.045.123 456.789 надлежитъ выговаривать слѣдующимъ образомъ: пять триллiоновъ, четыреста тритцать одна тысяща восемь сотъ шестьдесятъ три [для знака II] биллiона, сорокъ пять тысячь, сто двадцать три [для знака I] миллiона, четыреста пятьдесятъ шесть тысячъ семь сотъ восемьдесятъ девять.

Примѣчанiе.

26) Наблюдая правила въ положенiяхъ и въ семъ предложенiи описанныя безъ труда можно будетъ всякое число написать.

27) Ежели случится написанное число слѣдующимъ образомъ: 405,37, то такое число по запятую выговаривать надлежитъ, такъ какъ въ предложенiи показано; а знаки послѣ запятой слѣдующiя по § 21 должно

должно выговаривать какъ слѣдуетъ, четыреста пять, тридесятыхъ частей и семь сотенныхъ. Подобнымъ образомъ должно выговаривать и слѣдующія числа: 456,089; 605,806; 0,0603 и проч:

28) По силѣ параграфа 24 всѣ слѣдующія числа 00405,37; 0405,3700; 00405,370 и проч: тужъ имѣютъ силу, какую имѣетъ 405,37.

29) Ежели въ числѣ такимъ образомъ написанномъ, 6405,3708 запятая перенесется на другое мѣсто черезъ знакъ впередъ, какъ напримѣръ 64053,708, тогда знакъ, которой показывалъ десятыя части, показывать будетъ единицы; а которой показывалъ сотенныя части, будетъ показывать десятыя части, также знакъ единицы означающей будетъ означать десятки, и знакъ, которой показывалъ десятки, будетъ означать сотни, то есть всякаго знака единицы будутъ вдесятеро стоить противъ прежняго. Слѣдовательно симъ преложеніемъ запятой въ десять разъ увеличится предложенное число.

30) Изъ сего можно видѣть, что ежели запятую еще впередъ черезъ знакъ перенесть, напримѣръ въ томъ же числѣ 64037,08, то его знаменованіе всотеро увеличится: противное должно разумѣть объ уменьше-

уменьшеніи, то есть, ежели запятую отнесть черезъ знакъ назадъ; тогда число въ десять разъ меньше станетъ противъ прежняго, какъ напримѣръ 640,53708. Ежели черезъ два знака запятая отнесена будетъ 64,053708, тогда число въ сто разъ уменьшится и такъ далѣе.

ПОЛОЖЕНІЕ 4.

31) *Ломаное число означается двумя знаками, между которыми проводится линѣечка. Числитель ставится надъ линѣечкою, а знаменатель пишется подъ линѣечкою, какъ напримѣръ $\frac{2}{3}$, что разумѣть должно слѣдующимъ образомъ. Знаменатель показываетъ, на сколько частей должно раздѣлить единицу, къ которой дробь относится, а числитель показываетъ, сколько такихъ частей взять надлежитъ.*

ПОЛОЖЕНІЕ 5.

32) *Когда два количества между собою равны, то равенство ихъ означается знакомъ =, которой пишется между равными количествами,*

честпами, *и называется* знакъ равенства.

ПОЛОЖЕНІЕ 6.

33) *Чтобъ способнѣе можно было предлагаемыя въ Ариѳметикѣ и другихъ частяхъ Математики истинны доказывать, то вмѣсто числъ часто употребляются Латинскія литеры, какъ маленькія a, b, c и проч: такъ и большія A, B, C и проч:*

АКСІОМА 1.

34) *Равныя количества взаимно одно вмѣсто другаго поставлены быть могутъ.*

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 6.

35) *Сложеніе* [additio] есть способъ двумъ или многимъ числамъ одного роду находить одно равное. Найденное число называется *сумма* [Summa]. Знакъ сложенія есть +, и называется *плюсъ* [plus].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 7.

36) *Вычитанїе* [Subtractio] есть способъ находить число, которымъ одно изъ двухъ данныхъ чиселъ другое превышаетъ. Найденное число называется *разность* или *остатокъ* [Differentia или Residuum]. Знакъ вычитанія есть —, и называется *минусъ* [Minus].

Примѣчаніе.

37) Когда какія нибудь числа складывать должно, напр: A и B, то пишется слѣдующимъ образомъ: A+B или 8+5 = 13. А когда одно число изъ другаго вычитать надлежитъ; то къ вычитаемому числу прилагается знакъ —. Напр: ежели бы изъ 9 должно было вычесть 5 или D изъ C, то бы надлежало написать слѣдующимъ образомъ: 9—5=4: C—D.

Слѣдствіе 1.

38) Слѣдовательно вычитаемое число должно быть меньше того, изъ котораго вычитать должно.

Слѣдствіе 2.

39) Понеже числа состоятъ изъ единицъ, десятокъ, сотенъ, тысячъ и проч: то ежели

ежели надобно слагать нѣсколько чиселъ, надлежитъ всѣ единицы, всѣ десятки, всѣ сотни и проч: складывать особливо, и располагать по мѣстамъ имъ пристойнымъ. Тожъ должно разумѣть и о вычитаніи, то есть надлежитъ единицы вычитать изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ и проч: и продолжать даже до послѣднихъ отъ лѣвой руки знаковъ.

АКСІОМА 2.

40) *Ежели къ двумъ равнымъ количествамъ равныежъ приданы будутъ; то и произшедшїя суммы равны будутъ между собою. Также когда изъ равныхъ количествъ вычтены будутъ равные, то и остатки будутъ между собою равны.*

ЗАДАЧА 2.

41) *Данные одного роду числа складывать.*

РѢШЕНІЕ.

Данные числа надлежитъ написать такимъ образомъ, чтобъ единицы стоя-

яли подЪ единицами, десятки подЪ десятками, сотни подЪ сотнями, и такЪ далѣе. ПотомЪ проведши подЪ ними черту, должно начинать сложенїе отЪ малѣйшихЪ единицЪ, и сумму единицЪ подписывать подЪ единицами, сумму десятковЪ подЪ десятками, сотенЪ подЪ сотнями, и такЪ далѣе. Десятки, которые произойдутЪ отЪ простыхЪ единицЪ, надлежитЪ приложить кЪ десяткамЪ предложенныхЪ чиселЪ: произшедшїя отЪ сложенїя десятковЪ сотни надлежитЪ приложить кЪ сотнямЪ данныхЪ чиселЪ. Подобнымъ образомЪ должно слагать сотни, тысячи и проч: и найдется сумма искомая. ТожЪ должно наблюдать при сложенїи чиселЪ, которыя десятичныя дроби при себѣ имѣютЪ.

Примѣры.

95678 = A	604, 506
10463 = B	0, 3408
26124 = C	20, 72
1200 = D	687, 0045
133465 = S = A + B + C + D.	1312, 5713.

Надлежитъ начинать сложенїе отъ правой рукй, и говорить, 8 да 3 дѣлаютъ 11; да 4 дѣлаютъ 15, то есть одинъ десятокъ

сятокъ и 5 единицъ, и для того подъ единицами надлежитъ только подписать 5; а десятокъ должно причислить къ слѣдующему ряду. Такимъ же образомъ должно слагать десятки, и прежде всего къ нимъ приложить число десятковъ, произшедшихъ отъ сложенія единицъ, слѣдующимъ образомъ: 1 да 7 дѣлаютъ 8, да 6 будетъ 14, да еще 2 будетъ 16; то есть 6 десятковъ, которые подпиши подъ рядомъ десятковъ, и одна сотня, которую отнеси къ слѣдующему ряду, гдѣ сотни поставляются. Сложеніе сотенъ дѣлай подобнымъ образомъ, и говори 1 сотня, произшедшая отъ сложенія десятковъ, да 6 дѣлаютъ 7, да 4 дѣлаютъ 11, да 1 будетъ 12, да 2 здѣлаетъ 14, то есть четыре сотни и одна тысяча; и для того подъ рядомъ сотенъ подпиши 4, а одну тысячу отнеси къ слѣдующему ряду, и говори 1 да 5 дѣлаютъ 6, да 6 дѣлаютъ 12, да 1, то будетъ 13, то есть 3 и 1 десятокъ тысячъ; 3 тысячи подписавши подъ рядомъ тысячъ продолжай сложеніе, и говори 1 да 9 будетъ 10, да еще 1 будетъ 11, да 2 здѣлаетъ 13. И понеже больше ничего слагать не останется, то 13 надлежитъ такъ написать, чтобъ знакъ 3, означающей десятки тысячъ, стоялъ подъ рядомъ десяти тысячнымъ, а единица значащая сотни тысячъ на шестомъ отъ ~~лѣвой~~ руки мѣстѣ. И такъ сумма предложенныхъ чиселъ будетъ

 13346З.

133465. Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ при сложенїи другаго примѣру и прочихъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сложенїе бываетъ, когда всѣ единицы, всѣ десятки, всѣ сотни и проч: сложены будутъ въ одну сумму (§ 39); но найденное такимъ образомъ число содержитъ въ себѣ всѣ единицы, всѣ десятки, всѣ тысячи данныхъ чиселъ, слѣдовательно найденное число будетъ сумма предложенныхъ чиселъ и сложенїе здѣлано.

Слѣдствїе.

42) И такъ при сложенїи дробей, которыя къ той же единицѣ относятся, и одинакаго суть знаменованїя, должно поступать равнымъ образомъ. Надлежитъ сложить всѣхъ числителей, и подъ суммою подписать общаго знаменателя. Какъ напр: сумма дробей $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ будетъ $= \frac{5}{5} = 1$, и дробей $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$, сумма будетъ $= \frac{6}{7}$.

ЗАДАЧА 3.

43) *Данное число изъ другаго одинакаго роду вычесть.*

рѣ-

РѢШЕНІЕ.

Вычитаемое число подъ тѣмъ, изъ котораго вычесть надлежитъ, должно такъ подписать, чтобъ единицы соотвѣтствовали единицамъ, десятки десяткамъ, сотни сотнямъ, тысячи тысячамъ, и подъ ними провесть линею. Нача́ло вычитанія дѣлать должно отъ малѣйшихъ единицъ, и вычитать единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ и проч; остатокъ отъ единицъ надлежитъ подписывать подъ единицами; остатокъ отъ десятковъ подъ десятками, отъ сотенъ подъ сотнями, и такъ далѣе. Но ежели знакъ которой нибудь числа́, изъ котораго меньшее вычитается, будетъ меньше, нежели соотвѣтствующей вычитаемаго, въ такомъ случаѣ отъ знака слѣдующаго большаго званія должно занять единицу, и приложить къ знаку, изъ котораго вычитанія дѣлать не можно, гдѣ занятая единица учинитъ десять. Но понеже вычитаемой знакъ не можетъ больше быть, какъ 9; то по присовокупленіи десятка, какой бы знакъ вычитаемой ни былъ,

вычитаніе здѣлать можно будетъ. При знакѣ верьхняго числа, отъ котораго единица занимается, для памяти ставится точка, чтобъ видно было, что взята единица. Тожъ должно наблюдать при вычитаніи чиселъ, при которыхъ случатся десятичныя дроби.

Примѣры.

6874 = A	26,3.6.8
4253 = B	0,979
2621 = A—B.	25,389.

Пусть вычитаемое число будетъ B, а изъ котораго вычитать надлежитъ, A. Написавъ оные какъ показано, начинай отъ правой руки, говоря: 3 единицы изъ 4рехъ останется 1, которую подпиши подъ единицами, 5 изъ 7 въ остаткѣ будетъ 2, что должно подписать на второмъ мѣстѣ отъ правой руки, для того что десятки вычтены изъ десятковъ; 2 изъ 8 останется 6, которыя должно подписать подъ тѣми знаками, коихъ вычитаніе здѣлано. Такимъ же образомъ 4 изъ 6 останется 2, и найдется подлинной остатокъ A—B = 2621. Должно то же наблюдать при дѣланіи другаго примѣра.

9.1.2.04

9.1.2.04 = A	6.6, 9.021
68672 = B	23,021
22532 = A—B.	37,8811.

А когда въ вычитаемомъ числѣ случатся нѣкоторые знаки больше, нежели соотвѣтствующїе имъ того числа, изъ котораго вычитанїе дѣлать должно, какъ примѣры показываютъ; то поступать надлежитъ слѣдующимъ образомъ: 2 изъ 4 остатокъ будетъ 2, 7 изъ 0 вычесть не можно, и для того надлежитъ отъ слѣдующаго знака большаго званїя занять единицу, то есть десять десятковъ, тогда 7 десятковъ изъ десяти можно будетъ вычесть, и останется 3, что надлежитъ подписать на своемъ мѣстѣ. А понеже отъ 2 сотенъ одна ужѐ взята, то вычитать слѣдуетъ 6 не изъ 2, но изъ 1; но сего учинить не возможно, чего ради должно отъ слѣдующаго знака занять единицу, и сїе означить точкою, и тогда вычитать должно 6 сотенъ изъ 11ти, въ остаткѣ будетъ 5. Теперь слѣдовало бы вычитать 8 изъ 0; но и сего здѣлать не возможно: надлежитъ отъ знака слѣдующаго отъ лѣвой руки, т. е. 9ти занять единицу, которая здѣлаетъ 10 послѣдующаго, и для того вычитать должно 8 изъ 10ти останется 2. Остатокъ подписавъ на приличномъ мѣстѣ, вычитанїе продолжать должно далѣе, и говорить 6 изъ 8, а не изъ 9ти, въ остаткѣ будетъ 2,

 и иско-

и искомое число будетъ 22532. Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ при другомъ примѣрѣ вычитанія.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ дѣйствія видно, что единицы вычитываны изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ, тысячи изъ тысячъ и далѣе. Слѣдовательно остатокъ покажетъ, сколько вычитаемое число превышаетъ другое единицами, десятками, сотнями и тысячами, слѣдовательно вычитаніе здѣлано (§ 39).

Слѣдствіе.

44) Ломаныя числа, которыя къ одинакой единицѣ относятся, и имѣютъ одинакаго знаменателя, вычитаются подобнымъ образомъ. Надлежитъ только вычесть числителя одной дроби изъ числителя другой, и подъ разностью подписать общаго знаменателя. Напр: $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$ или $\frac{7}{12}-\frac{6}{12}=\frac{1}{12}$ и проч:

Примѣчаніе 1.

45) Когда случится вычитать большее число изъ меньшаго, то вычитается меньшее

меньшее изъ большаго, и къ остатку прилагается знакъ —: напр: 5—8=—3.

46) Когда нѣкоторые знаки вычитаемаго числа будутъ больше, нежели соотвѣтствующіе имъ верьхніе, въ такомъ случаѣ иные способнѣе вмѣсто того, чтобъ къ слѣдующему отъ лѣвой рукй знаку верьхняго числа ставить точку, которой знаменованіе уже объявлено, ставятъ оную у слѣдующаго вычитаемаго знака, которая будетъ значить, что къ вычитаемому знаку прибавить должно единицу, напримѣръ:

```
 19040
  86.8.5
 ------
 10355
```

Вычитаніе дѣлай слѣдующимъ образомъ: 5 изъ 10 останется 5, 9 изъ 14 останется 5, 7 изъ 10 остатокъ будетъ 3, 9 изъ 9 будетъ 0, и для того единицу подписать должно на своемъ мѣстѣ. Основаніе сего способа зависитъ отъ слѣдующей Аксіомы. Когда вычитается одно число изъ другаго, то остатокъ всегда будетъ тотъ же, хотя къ онымъ числамъ по единицѣ или по другому какому знаку приложится (§ 40). Такъ ежели вычтется 5 изъ 9 останется 4; тожъ останется, ежели вычту 6 изъ 10, то есть 4.

 47)

47) Повѣренїе сложенїя способно дѣлается чрезъ вычитанїе, а повѣренїе вычитанїя чрезъ сложенїе. Когда сложенїе ужѐ здѣлано, надлежитъ одинъ порядокъ слагаемыхъ чиселъ отдѣлить чертою, какъ въ примѣрѣ A, и сыскать остальныхъ сумму, которую подписавъ подъ суммою всѣхъ чиселъ данныхъ, надлежитъ вычесть изъ всей суммы, и ежели остатокъ будетъ равенъ отдѣленному порядку, то сложенїе будетъ вѣрно.

95678 = A	604, 506
10463 = B	0, 3408
26124 = C	20, 72
1200 = D	687, 0045
133465 = S	1312, 5713
37787 = B + C + D	708, 0653
95678 = A	604, 506.

48) Вычитанїе повѣряется чрезъ сложенїе слѣдующимъ образомъ: найденной остатокъ данныхъ чиселъ приложи къ вычитаемому числу, и ежели сумма равна будетъ верьхнему числу, то вычитанїе здѣлано вѣрно.

91204 = A		60,923
68672 = B		23,02
22532 = A - B		37,903
68672 = B		23,02
91204 = A		60,923.

Примѣчаніе 2.

49) При случающихся въ общемъ житіи задачахъ всякъ можетъ видѣть, гдѣ должно употреблять вычитаніе, и гдѣ сложеніе. Ежели бы кто имѣлъ записную книгу приходовъ и росходовъ, и по прошествіи нѣкотораго времени вѣдать бы хотѣлъ, сколько у него денегъ находится, то бы надлежало всѣ приходы сложить въ одну сумму, потомъ сложить и росходы, и сумму росходовъ вычесть изъ суммы приходовъ; остатокъ покажетъ, сколько денегъ на лицо. Также, ежели бы мнѣ должны были нѣсколько человѣкъ, одинъ бы долженъ былъ A, другой B, третей C, четвертой D, и самъ бы другимъ долженъ былъ E и F, и хотѣлъ бы вѣдать, сколько по возвратѣ и расплатѣ долговъ останется; то явствуетъ, что то, чѣмъ мнѣ другіе должны, надлежитъ сложить, и чѣмъ я другимъ долженъ, сложить же, и сумму послѣднюю, ежели она будетъ меньше прежней, вычесть изъ перьвой; остатокъ дастъ число денегъ, которыя у меня будутъ. Ежели же сумма послѣдняя будетъ больше

больше первой, то должно первую вычесть изъ послѣдней; и передъ остаткомъ поставить знакъ —, которой пусть будетъ R. Количество R будетъ значить, сколько я буду долженъ, ежели всѣ возвращенныя изъ долговъ деньги употреблю на расплату долговъ. О знакахъ + и —, какъ ихъ разумѣть должно, пространнѣе говорено будетъ въ Алгебрѣ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 8.

50) *Умноженіе* [Multiplicatio] есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ, которые пусть будутъ M и N, находить третіе P, въ которомъ бы столько разъ содержалось одно которое нибудь изъ данныхъ N, сколько разъ единица содержится въ другомъ данномъ M. Искомое число P называется *произведеніе* [Productum seu factum], M *множитель* [multiplicator], N *множимое число* [Multiplicandum]; а оба вмѣстѣ называются однимъ словомъ *факторы* [Factores].

Слѣдствіе.

51) И такъ, когда надобно число какое нибудь N на другое M умножить, то надлежитъ столько разъ взять число N,

сколько

сколько въ M единицъ содержится. Слѣдовательно умноженіе есть повторенное сложеніе. Умноженіе означается слѣдующимъ образомъ: $M.N = P$ или $M \times N = P$, а по большей части просто $MN = P$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 9.

52) *Дѣленіе* [Divisio] есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ D и N находить третіе Q, въ которомъ бы столько разъ содержалась единица, сколько разъ одно изъ данныхъ двухъ чиселъ D въ другомъ данномъ N содержится. Искомое число Q называется *частное число* [Quotus], D *дѣлитель* [Divisor], а N *дѣлимое* [Dividendum]

Слѣдствіе.

53) Слѣдовательно, когда кто хочетъ раздѣлить какое нибудь число N на другое D, т. е. найти Q, тотъ долженъ столько разъ вычитать число D изъ числа N, сколько разъ можно. Число вычитаній покажетъ искомое Q, то есть сколько разъ число D содержится въ числѣ N; по сему дѣленіе есть нѣсколько разъ повторенное вычитаніе, и какъ вычитаніе противное есть дѣйствіе сложенію, такъ дѣленіе умноженію.

Дѣленіе

дѣленіе означается слѣдующимъ образомъ: $N : D = Q$ или $\frac{N}{D} = Q$.

АКСІОМА 3.

54) *Ежели два равные количества на третіе какое нибудь умножены или раздѣлены будутъ, то въ первомъ случаѣ произведенія, а въ другомъ частные числа будутъ равны.*

Слѣдствіе 1.

55] Ежели произведеніе $M \times N = P$ раздѣлится на одного фактора, то произойдетъ другой факторъ, т. е. $\frac{M \times N}{M} = \frac{P}{M} = N$. А ежели частное число $Q = \frac{N}{D}$ умножено будетъ на дѣлителя; то произойдетъ дѣлимое число $Q \times D = \frac{N \times D}{D} = N$.

Слѣдствіе 2.

56) Ежели какое нибудь число N раздѣлено будетъ на двѣ части P и Q такъ, чтобъ было $N = P + R$, и ежели которая нибудь часть P раздѣленная на D, дастъ частное число Q; то понеже $P = Q \times D$, будетъ $N = Q \times D + R$. Такимъ образомъ, ежели будетъ $R = S \times D$, то будетъ $N = Q \times D + S \times D$,

то

то есть, ежели множимое число состоять будетъ изъ двухъ частей, напр: $A+B=N$, и надлежитъ оное умножить на D; то произведенiе найдется, когда всякую часть порознь умножишь на D. Тожъ должно разумѣть и о частяхъ $A-B=N$; слѣдовательно $N\times D=A\times D\mp B\times D$.

Слѣдствiе 3.

57) Ежели случится дѣлить $N=A\mp B$ на D, то такимъ же образомъ частное число будетъ $\frac{N}{D}=\frac{A}{D}\mp\frac{B}{D}$; и ежели будетъ $D=E+F$, то $\frac{N}{E+F}=\frac{A\mp B}{E+F}=\frac{A}{E+F}\mp\frac{B}{E+F}$.

Слѣдствiе 4.

58) Когда въ умноженiи факторъ которой нибудь на цѣлое число умножится, то и произведенiе столькожъ разъ увеличится, сколь велико оное число. Напр: ежели M или N удвоится, или умножится на 2, то и произведенiе удвоится; а ежели одинъ изъ факторовъ умноженъ будетъ на 20, въ столько разъ и произведенiе умножится. А когда факторъ раздѣлится на какое нибудь цѣлое число, или въ нѣсколько разъ уменьшится, то и произведенiе въ столькожъ разъ уменьшится. Напр: ежели бы въ произведенiи $M\times M=P$ вмѣсто

M

M взято было $\frac{1}{10}$ M, то бы и произведенїе было $=\frac{1}{10}$ P.

Слѣдствїе 5.

59) Въ дѣленїи ежели дѣлимое число на какое нибудь цѣлое число умножится, то и частное число въ столькожъ разъ увеличится при томъ же дѣлителѣ, такъ какъ будто бы самое частное число на оное было умножено. А ежели дѣлитель на какое нибудь цѣлое число умножится; то частное число въ столько разъ уменьшится. И обратно, ежели дѣлимое число раздѣлено будетъ на какое нибудь цѣлое число, то частное въ столько разъ уменьшится; а когда дѣлитель на какое нибудь цѣлое число раздѣлится, то частное число въ столькожъ разъ умножится.

Слѣдствїе 6.

60) По сему, ежели какое нибудь количество S умножится на другое M, и на тожъ раздѣлится, то произойдетъ самое данное число $S=\frac{S\times M}{M}$. Также, ежели частнаго числа̀ изображеннаго, какъ выше сего показано $\frac{N}{D}$ дѣлимое число, и дѣлитель на M умножены будутъ, то частное число не перемѣняется. $\frac{N}{D}=\frac{M\times N}{M\times D}$.

ЗАДАЧА. 4

61) *Данное какое нибудь число на другое умножить.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть даны будутъ чи́сла M=4, а S=15674 или M=3, а N=24,035 по § 51. Надлежитъ число S столько само къ себѣ приложить, сколько въ множителѣ единицъ содержится. По сему произведенія данныхъ чиселъ найдутся слѣдующимъ образомъ:

15675=N	24,035
15674=N	24,035
15674=N	24,035
15674=N	72,105.
62596=4N=$M_{\times}N$.	

Сей способъ можно употреблять, когда множитель состоитъ изъ простыхъ единицъ; но въ противномъ случаѣ, когда множитель будетъ состоять изъ многихъ знаковъ, сего способа никоимъ образомъ употребить не возможно. Для такихъ случаевъ надлежитъ въ памяти содержать произведенія всѣхъ чиселъ изъ одного знаку состоящихъ, на чи́сла изъ одного знаку состоящіе, что покажетъ слѣдующая таблица,

которая чрезъ повторенное сложенiе здѣлана.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	~~71~~ 72
9								81

Когда кто сiю таблицу въ памяти содержитъ, то при умноженiи, какого нибудь одного числа на другое, поступать слѣдующимъ образомъ. Надлежитъ множителя подписать подъ множимымъ числомъ такъ, чтобъ единицы соотвѣтствовали единицамъ, десятки десяткамъ, сотни сотнямъ и проч: и подъ ними провесть черту. Потомъ начиная отъ правой руки должно умножать перьвымъ знакомъ множителя всякой знакъ порознь множимаго числа, и произведенiя подписывать подъ чертою. Десятки произшедшiе отъ умноженiя надлежитъ придавать къ слѣдующему отъ лѣвой

руки

руки произведенію. Такимъ же образомъ должно умножать и другими множителя знаками, наблюдая только то, чтобъ произведенія изъ десятковъ отвѣтствовали десяткамъ, изъ сотенъ сотнямъ, изъ тысячъ тысячамъ и проч: Напослѣдокъ найденныя частныя произведенія должно сложить въ одну сумму, которая дасть искомое произведеніе.

Примѣръ.

45673 =	N
145 =	M
228365	A
182692	B
45673	C
6622585 =	M×N.

Пусть будетъ множимое число N, а множитель M. Написавъ ихъ такъ, какъ показано, умножай сперьва помощію данной таблицы знакомъ 5; и понеже 3жды 5 дѣлаетъ 15, то 5 подпиши подъ перьвымъ знакомъ, а 1 десятокъ удержи къ слѣдующему мѣсту; потомъ 5ю 7 дѣлаетъ 35 десятковъ, а съ оставшимся отъ умноженія единицъ десяткомъ будетъ 36, то есть 3 сотни и 6 десятковъ, и для того 6 подпиши на второмъ мѣстѣ, а 3 удержи въ умѣ къ слѣдующему мѣсту; потомъ 5ю 6 дѣлаетъ 30 сотенъ, а съ удержанными въ

умѣ будетъ 33 сотни, и такъ 3 сотни напиши на третьемъ мѣстѣ, а 3 тысячи удержи въ умѣ; потомъ 5ю 5 дѣлаетъ 25 тысячъ, да 3 въ умѣ удержанныя, будетъ 28, и по сему знакъ 8 только подписать должно, а 2 удержать въ умѣ. Наконецъ 5ю 4 дѣлаетъ 20, и 2 въ умѣ удержанныя будетъ 22. А понеже больше въ множимомъ числѣ ничего не остается, то должно подписать оба знака 22.

Теперь слѣдуетъ умножать вторымъ знакомъ множителя, то есть десятками, и для того самое первое произведенïе должно подписать на второмъ мѣстѣ, или подъ тѣмъ знакомъ, которымъ умножаешь, говоря: 4жды 3 дѣлаетъ 12; знакъ 2 должно подписать противъ знака умножающаго, а единицу удержать въ умѣ къ слѣдующему мѣсту; потомъ 4жды 7 дѣлаетъ 28, съ единицею въ умѣ удержанною будетъ 29; и такъ подпиши только знакъ 9, а 2 удержи къ слѣдующему произведенïю; потомъ 4жды 6 дѣлаетъ 24, да 2, здѣлаетъ 26, изъ котораго числа 6 только подпиши на своемъ мѣстѣ, а 2 удержи въ умѣ; потомъ 4жды 5 дѣлаетъ 20, и еще 2, здѣлаетъ 22, и такъ 2 только подписать должно на надлежащемъ мѣстѣ, а 2 удержать въ умѣ. Наконецъ 4жды 4 16, да 2, будетъ 18; и понеже ничего болѣе умножать не остается, то должно подписать оба знаки.

Напо-

Напослѣдокъ умножать слѣдуетъ единицею; и понеже единица означаетъ сотни, произведеніе изъ единицы на первой множимаго числа знакъ надлежитъ подписать на мѣстѣ, сотнямъ пристойномъ. Но произведеніе изъ единицы на множимое число будетъ самое множимое число, и сумма всѣхъ частныхъ произведеній будетъ = 6622585.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ самаго дѣйствія видно, что въ первомъ порядкѣ A всякой знакъ множимаго числа столько разъ содержится, сколько единица въ первомъ знакѣ множителя. Также во второмъ порядкѣ B столько разъ множимое число содержится, сколько единица во второмъ множителя знакѣ. Тожъ должно разумѣть и о третьемъ; но понеже всѣ порядки сложены бываютъ, то въ суммѣ столько разъ будетъ содержаться множимое число, сколько разъ единица въ множителѣ содержится.

Примѣчаніе.

62) Чтобъ способнѣе опредѣлить правила, и понять можно было, которыя

при умноженіи чиселъ, десятичныя дроби при себѣ имѣющихъ, наблюдать должно, три случая принять должно въ разсужденіе. 1) Когда при множимомъ только числѣ находятся десятичныя дроби. 2) Когда множитель одинъ имѣетъ при себѣ десятичныя дроби. 3) Когда при множителѣ и при множимомъ числѣ будутъ десятичныя дроби. Примемъ въ разсужденіе первой случай; пусть будетъ множимое число 2608, а множитель 4, произведеніе будетъ 10432. Но ежели бы множимое число было 260,8; тобъ произведеніе было 1043,2; а когдабъ множимое число было 26,08, тогда бы произведеніе было 104,32 (§ 30. 58). Что сказано о множимомъ числѣ, тожъ должно разумѣть и о множителѣ (§ 58). По сему когда 3054, умноженное на 3, дастъ 9162; то умноженное на 0,3 дастъ 916,2; умноженное на 0,03 дастъ 91,62. Такимъ же образомъ тожъ число, умноженное на 23, дастъ 70192: умноженное на 2,3 дастъ 7019,2, а умноженное на 0,23, дастъ 701,92. Изъ сего видно, что правила, которыя при первомъ и второмъ случаяхъ наблюдать надлежитъ, суть одинаки, то есть въ обѣихъ случаяхъ въ найденномъ произведеніи столько отъ правой руки должно отдѣлить знаковъ для десятичныхъ дробей, сколько въ множимомъ числѣ или множителѣ оныхъ имѣется.

63)

63) Понеже всякой факторъ столько требуетъ знаковъ въ произведенiи для десятичныхъ дробей, сколько ихъ числомъ при каждомъ факторѣ находится: слѣдовательно, когда при обѣихъ факторахъ будутъ десятичныя дроби, то въ произведенiи столько надлежитъ отдѣлить знаковъ отъ правой рукй, которые бы десятичныя дроби означали, сколько знаковъ при обѣихъ факторахъ находится. Такъ напр: надлежало бы 3,04 умножить на 2,3; въ произведенiи обыкновеннымъ образомъ найденномъ 6992 должно запятою отъ правой рукй отдѣлить три знака, и искомое произведенiе будетъ 6,992. Тожъ должно разумѣть и о числахъ, которыя при себѣ имѣютъ нулй, какъ слѣдующiю примѣры показываютъ.

```
 15060        24,035
   230          0,05
------        --------
  4518        1,20175.
 3012
--------
3463800.
                 0,204
                  3,05
 62,345         ------
      3           1020
-------           612
187,035.        --------
                0,62220.
```

62,345	0,0072
300	0,043
187,035	216
	288
	0,0003096.

ЗАДАЧА 5.

64) *Данное число раздѣлить на другое.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ дѣлимое число N=1071, а дѣлитель D=204, то [§ 53] надлежитъ дѣлителя столько разъ вычесть изъ дѣлимаго числа̀, сколько разъ можно: число вычитаній покажетъ, сколько разъ дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ содержится, къ которому ежели придана будетъ дробь, которой числитель будетъ число отъ вычитаній оставшееся, а знаменатель самой дѣлитель, то найдено будетъ искомое число.

$$
\begin{array}{r l}
1071 & = N \\
204 & = D \\
\hline
867 & = N-D \\
204 & \\
\hline
663 & = N-2D \\
204 & \\
\hline
459 & = N-3D \\
204 & \\
\hline
255 & = N-4D \\
204 & \\
\hline
51 & = N-5D
\end{array}
$$

По сему видно, что дѣлителя 5 разъ можно вычесть изъ дѣлимаго числа̀, и притомъ еще останется 51; слѣдовательно частное число будетъ $= \frac{1071}{204} = 5\frac{51}{604} = 5\frac{1}{4}$.

Но подобное дѣленіе очень будетъ не способно, ежели дѣлимое число будетъ велико, и для того въ такихъ случаяхъ вычитаемъ не самаго дѣлителя, но его произведенія, происходящія отъ умноженія на какой нибудь знакъ, что дѣлается слѣдующимъ образомъ.

Написавъ отъ лѣвой рукѝ дѣлителя, а отъ правой рукѝ дѣлимое

число, надлежитъ въ дѣлимомъ числѣ отъ лѣвой руки отдѣлить столько знаковъ, сколько въ дѣлителѣ находится: или ежели первой знакъ дѣлимаго числа̀ будетъ меньше, нежели первой дѣлителя, то къ отдѣленнымъ знакамъ дѣлимаго числа̀ должно присовокупить еще слѣдующей, и смотрѣть, сколько разъ дѣлитель въ отдѣленныхъ знакахъ содержится, что дастъ первой знакъ въ частномъ числѣ. Симъ знакомъ надлежитъ умножить дѣлителя, и произведенiе вычесть изъ отсѣченныхъ знаковъ дѣлимаго числа̀. Потомъ, понеже остатокъ долженъ быть меньше, нежели дѣлитель, надлежитъ къ остатку приписать слѣдующей знакъ дѣлимаго числа̀, и спрашивать, сколько разъ дѣлитель въ семъ числѣ содержится, что дастъ второй знакъ дѣлимаго числа̀. Симъ знакомъ умножь дѣлителя, и произведенiе вычти изъ соотвѣтствующихъ знаковъ. Къ остатку, ежели имѣются знаки, присовокупи слѣдующей знакъ дѣлимаго числа̀, и смотри, какъ прежде, сколько разъ дѣлитель въ семъ числѣ содержится: знакъ означающей, сколько разъ дѣлитель въ дѣ-

лимомъ

лимомъ числѣ содержится, дастъ прешей знакъ частнаго числа. Подобнымъ образомъ дѣленіе продолжается даже до послѣдняго отъ правой руки дѣлимаго числа знака, и найдется искомое число.

Примѣръ.

```
805) 670894 (833 329/805.      24) 65496 (2729.
     6440                          48
     ----                          ---
      2689                         174
      2415                         168
      ----                         ---
       2744                          69
       2415                          48
       ----                          ---
        329                          216
                                     216
                                     ---
                                       0
```

Пусть будетъ дѣлимое число N=670894, а дѣлитель D=805, которыя должно написать, какъ въ примѣрѣ написано. Прежде всего надлежитъ отдѣлить отъ лѣвой руки столько знаковъ дѣлимаго числа, изъ сколько знаковъ дѣлитель состоитъ. Но понеже въ трехъ первыхъ знакахъ дѣлитель содержаться не можетъ, то должно присовокупить слѣдующей знакъ 8, и спрашивать, сколько разъ дѣлитель 805 въ 6708 содержится? Когда сего скоро узнать не можно, то спрашивай, сколько разъ первой знакъ отъ лѣвой руки содержится въ двухъ пер-

выхъ

выхъ знакахъ дѣлимаго числа̀. А ежели бы дѣлитель и дѣлимое число изъ равнаго числа̀ знаковъ состояли; тобъ надлежало спрашивать, сколько разъ перьвой знакъ дѣлителя содержится въ перьвомъ знакѣ дѣлимаго числа̀, что необыкшимъ покажетъ таблица умноженія. Такимъ образомъ найдется, что дѣлитель содержится 8ю въ отдѣленной части дѣлимаго, и для того написавъ 8 на перьвомъ мѣстѣ послѣ линѣйки, умножь знакомъ 8 дѣлителя, и произведеніе вычти изъ отвѣтствующей части дѣлимаго числа̀, останется 268. Къ сему остатку присовокупи слѣдующей знакъ дѣлимаго числа̀ 9, и спрашивай, сколько разъ дѣлитель содержится въ 2689; найдется 3 жды, и для того написавъ знакъ 3 на второмъ мѣстѣ частнаго числа̀, и имъ умноживъ дѣлителя, произведеніе должно вычесть изъ 2689, въ остаткѣ будетъ 274. Потóмъ присовокупи слѣдующей знакъ дѣлимаго числа̀, и будетъ дѣлимая часть 2744, въ которой по таблицѣ видно, что дѣлитель можетъ содержаться 3 жды; и для того написавши частное число 3 на своемъ мѣстѣ, должно онымъ умножить дѣлителя, и произведеніе 2415 вычесть изъ 2744, въ остаткѣ будетъ 329. И понеже въ дѣлимомъ числѣ больше чиселъ не имѣется, то сей остатокъ и съ дѣлителемъ должно къ частному числу приписать, какъ выше сего показано.

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ самаго дѣйствія видно, что найденное число показываетъ, сколько разъ дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ содержится; слѣдовательно въ частномъ числѣ столько разъ единицъ содержится, сколько въ дѣлимомъ дѣлитель.

Примѣчаніе 1.

65) Не всегда помощію таблицы можно узнать, сколько разъ дѣлитель въ отсѣченныхъ дѣлимаго числа знакахъ содержится, а особливо, когда дѣлитель состоитъ изъ многихъ знаковъ. Во второмъ примѣрѣ хотя таблица и показываетъ, что 2 въ 6 содержится 3жды; однакожъ не больше можно задать, какъ 2мя, потому что ежели тремя умножишь дѣлителя, то произведеніе будетъ больше, нежели первые знаки дѣлимаго числа. Сіе показываетъ, что дѣлитель содержится меньше, нежели 3жды въ отдѣленныхъ знакахъ дѣлимаго числа. Противнымъ образомъ, ежели бы послѣ вычтеннаго произведенія остатокъ былъ больше, нежели дѣлитель, или ему равенъ такъ, чтобъ можно было дѣлителя еще вычесть изъ остатку; то должно задавать большимъ знакомъ, нежели прежде задано было. Сіе наблюдая всегда найдется настоящее частное число.

При-

Примѣчанiе 2.

66) Когда въ дѣленiи при данныхъ числахъ случатся десятичныя дроби; то какъ въ умноженiи, такъ и здѣсь три случая различать надлежитъ. 1) Когда при дѣлимомъ только числѣ случатся десятичныя дроби. 2) Когда только при дѣлителѣ. 3) Когда при обѣихъ, какъ дѣлимомъ такъ и дѣлителѣ. Возмемъ перьвой случай, и пусть будетъ дѣлимое число 60582, а дѣлитель 23, и найдется частное число 2634. Но по §549, ежели дѣлимое число на какое нибудь раздѣлится, или въ нѣсколько разъ уменьшится; то и частное число въ столькожъ разъ уменьшится, такъ что ежели бы вмѣсто 60582 дѣлимое число было 6058,2; тобъ и частное число было 263,4. Ежели дѣлимое число будетъ 605,82 при томъ же дѣлителѣ; то частное число будетъ ~~605,82~~ при томъ же дѣлителѣ, и 60,582 раздѣленное на 23, дастъ частное число 2,634, то есть здѣлавъ дѣленiе обыкновеннымъ образомъ, въ частномъ числѣ столько надлежитъ отдѣлить знаковъ, которые бы означали десятичныя дроби, сколько ихъ при дѣлимомъ числѣ находится.

67) Понеже въ дѣленiи, когда дѣлитель на какое нибудь число умножится, то частное въ столько разъ меньше становится; а когда дѣлитель на какое нибудь

число

число раздѣлится, то частное число при томъ же дѣлимомъ числѣ въ столько разъ увеличивается, напр: 5768 раздѣленное на 2, дастъ 2884; но когда бы надлежало раздѣлить на 0,2, тогда частное число должно быть въ десять разъ больше прежняго, и было бы 28840, тожъ число раздѣленное на 0,02 дастъ частное число 288400. Слѣдовательно, когда дѣлитель только будетъ имѣть при себѣ десятичныя дроби, и дѣлить дѣлимое число на цѣло, тогда здѣлавъ дѣленіе обыкновеннымъ образомъ, къ частному числу столько нулей отъ правой руки придать должно, сколько знаковъ для десятичныхъ дробей при дѣлителѣ находится. Но ежели не на цѣло дѣлитель дѣлитъ данное число, то къ самому дѣлимому числу должно придать столько нулей, сколько знаковъ къ десятичнымъ дробямъ принадлежащихъ дѣлитель имѣетъ, и дѣлить обыкновеннымъ образомъ (§ 29). Напр: 53364 раздѣленное на 1,02, даетъ частное число 54288+.

68) Изъ сего видѣть можно, что когда при дѣлимомъ числѣ, и дѣлителѣ будутъ десятичныя дроби, въ такомъ случаѣ дѣленіе здѣлавъ, какъ показано выше сего, мѣсто простыхъ единицъ должно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: Сперьва означи̂ мѣсто для простыхъ единицъ смотря на дѣлимое число, потомъ чрезъ столько знаковъ

ковъ запятую впередъ въ правую сторону перенеси, сколько знаковъ при дѣлителѣ для десятичныхъ дробей находится. Напримѣръ число 4567, 0046, раздѣленное на 2, 04, даетъ 223874+, въ которомъ смотря на дѣлимое число, должно бы частное быть 22, 3872+. А для дѣлителя запятую должно перенесть впередъ черезъ два знака, и искомое частное число будетъ 2238, 82+. А ежели бы дѣлитель былъ 0, 203, тобъ частное было 22387, 2+. Тожъ должно разумѣть и о нуляхъ, когда на концѣ данныхъ чиселъ случатся.

69) Ежели дѣлимое число нацѣло на даннаго дѣлителя раздѣлено быть не можетъ, т. е. послѣ дѣленія будетъ какой нибудь остатокъ, и дѣлимое число будетъ имѣть при себѣ десятичныя дроби; то остатокъ отбрасывается, когда большой аккуратности не требуется: но въ противномъ случаѣ, также когда при дѣлимомъ числѣ не будетъ десятичныхъ дробей, дѣленіе продолжается присовокупляя къ дѣлимому числу столько нулей, сколько заблаго разсудится. Произшедшіе отъ сего въ частномъ числѣ знаки означать будутъ десятичныя дроби. Напримѣръ:

```
805 ) 67089,45   ( 83,3409361
      6440
       2689
       2415
        274 4
        241 5
         32 95
         32 20
            7500
            7245
             2550
             2415
              1350
```

Таким образом можно продолжать дѣленіе далѣе, ежели кто аккуратнѣйшее частное число имѣть желаетъ. Подобнымъ образомъ поступать должно, когда случится дѣлить меньшее число на большее, какъ напримѣръ: 9 или 9,00 на 12 частное число будетъ 0,75.

Примѣры дѣленія:

```
34050 ) 6927472500 ( 203450
        68100
         117472
         102150
          153225
          136200
           170250
           170250
                0
```

```
) 64,0054 (0,1012+        12,04) 361,9224 (30,06
  63 2                           361 2
  ----                           ------
     805                            7224
     632                            7224
    ----                            ----
     1734                             0
     1264
     ----
      470

          2,34) 30456    (13015+
                234
                ---
                 705
                 702
                 ---
                  360
                  234
                  ---
                  1260
                  1170
                  ----
                    90 .
```

Примѣчаніе 3.

70) Повѣреніе умноженія дѣлается чрезъ дѣленіе, и повѣреніе дѣленія чрезъ умноженіе. Для повѣренія умноженія должно раздѣлить произведеніе на котораго нибудь фактора. Ежели умноженіе здѣлано справедливо, то частное число должно быть другой факторъ (55). При повѣреніи дѣленія надлежитъ частное число умножить дѣлителемъ, и ежели произведеніе будетъ самое дѣлимое число, дѣленіе будетъ здѣлано вѣрно.

6045

```
        6045          254 )1536801б( 60504
         104               1524
       24180                1280
       6045                 1270
104 )628680( 6045            1016
      624                    1016
       468                      0
       416
        520                  60504
        520                    254
          0                 242016
                           302520
                          121008
                          1536801б
```

Изъ сего видно, что какъ дѣленїе, такъ и умноженїе здѣланы вѣрно.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О СОДЕРЖАНИИ И ПРОПОРЦІИ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 10.

71) Когда два одного роду количества между собою сравниваются, то есть, когда смотрится, какимъ образомъ одно изъ другаго происходитъ; то сїе сравненїе называется *содержа-*

нїе [Ratio]. Данные количества называются *термины содержанїя* [Termini Rationis] одинъ *предъидущей* [antecedens], а другой *послѣдующей* [consequens].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 11.

72) Когда при сравненїи двухъ количествъ въ разсужденїе берется ихъ разность, т. е. чѣмъ одно другое превышаетъ; то сїе сравненїе называется *Ариѳметическое* [Arithmetica]. А когда разсуждается въ сколько разъ одно другаго больше, т. е когда въ разсужденїе берется частное число; то сравненїе называется *Геометрическое* [Geometrica]. Знакъ Ариѳметическаго содержанія есть A—B, а Геометрическаго A: B.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 12.

73) *Знаменатель* [Exponens или Denominator Rationis] содержанія есть частное число, которое происходитъ отъ дѣленія предъидущаго термина чрезъ послѣдующей, или послѣдующаго чрезъ предъидущей.

Слѣд-

Слѣдствїе.

74) По сему видно, что знаменатель содержанїя можетъ быть цѣлое число, можетъ быть и дробь.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 13.

75) Содержанїе количества A къ количеству B равнымъ называется содержанїю количества C къ количеству D, когда послѣдующїе количества B и D раздѣлены будутъ на равное число частей; и сколько частей количества B содержаться будетъ въ количествѣ A, столькожъ частей количества D содержаться будетъ въ количествѣ C, или короче сказать, когда количество A столько разъ содержится въ количествѣ B, сколько количество C содержится въ количествѣ D, и обратно, тогда содержанїе A : B будетъ равно содержанїю C : D, и количества A, B, C, D называются *пропорцїональные*. Изъ сего видно, что *Пропорцїя* [Proportio] есть равенство двухъ содержанїй, и пишется A : B = C : D, а выговаривается, какъ A содержится къ B, такъ C содержится къ D.

Слѣдствїе 1.

76) И такъ содержанїе A:B больше будетъ содержанїя C:D, когда A больше разъ содержится въ B, нежели C содержится въ D, что означается слѣдующимъ образомъ: A:B > C:D, а содержанїе C:D будетъ меньше содержанїя A:B. Такое неравенство означается, какъ слѣдуетъ; C:D < A:B.

Слѣдствїе 2.

77) Понеже количества A, B, C, D пропорцїональны суть, когда B такимъ образомъ производится изъ A, какъ D происходитъ изъ C, и обратно. Но въ умноженїи произведенїе P такъ происходитъ изъ множимаго числа N, какъ множитель M изъ единицы: слѣдовательно 1, M, N и P будутъ пропорцїональны, и можно ихъ написать, какъ слѣдуетъ 1:M = N:P. Подобнымъ образомъ въ дѣленїи частное число Q столько разъ содержитъ въ себѣ единицу, сколько дѣлимое число N содержитъ въ себѣ дѣлителя D. По сему D, N, 1 и Q будутъ пропорцїональны и D:N = 1:Q.

Примѣчанїе.

78) Къ доказательству количествъ A, B, C, D, что они пропорцїональны, ничего

то не требуется, какъ показать, что какъ A происходитъ изъ B, такъ C изъ D; или, что то же самое значитъ, что въ количествѣ A столько числомъ такихъ частей содержится, изъ какикъ состоитъ B, сколько въ количествѣ C такихъ частей находится, изъ какихъ состоитъ D; или что знаменатели содержанiй равны между собою. На примѣръ, ежели бы было $A = 2B$, а $C = 2D$, или $A = \frac{1}{2}B$, а $C = \frac{1}{2}D$, или $A = B + \frac{2}{3}B$, а $C = D + \frac{2}{3}D$, или $A = mB$ а $C = mD$, взявши за литеру m какiе нибудь по произволенiю чи́сла; то будетъ $A : B = C : D$, слѣдовательно и чи́сла, которыми количества изображаются, будутъ пропорцiональны. Изъ опредѣленiя содержанiя видно, что количества A и B неотмѣнно должны быть одинакаго роду, такъ какъ и коли- C и D. Хотя не требуется, чтобъ всѣ четыре были одинакаго роду, однакожъ ни что непрепятствуетъ, чтобъ и всѣ четыре были одинакаго роду.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 14.

79) Ежели количества A, B, C, D, будутъ пропорцiональны, и будетъ $B = C$; то сiя пропорцiя называется *безпрерывная* [Continua], а терминъ B или C называется *средней пропорцiональной* [Medius proportionalis].

 ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 1.

80) *Ежели будутъ четыре количества A, B, C, и D пропорціональны; то чиселъ, которыми оное изображаются, будетъ произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ, то есть, ежели будетъ*

$$A : B = C : D,$$

то должно быть и $A \times D = B \times C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже $A : B = C : D$, то должно быть $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (§ 75); умноживъ съ объихъ сторонъ сперьва на B, потомъ на D произойдетъ $A \times D = C \times B$ (§ 54, 60).

Слѣдствіе.

81) Ежели будетъ $B = C$, то должно быть также и $A \times D = B \times B$. Потомъ обратно, ежели будетъ $A \times D = B \times C$, то должно быть $A : B = C : D$.

Примѣчаніе.

82) Отсюду имѣемъ другой несомнѣнной признакъ количествъ и чиселъ, которыми

торыми количества изображаются, когда они пропорціональны между собою. И по сему, когда про какіе нибудь числа или количества доказать можемъ, что произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ; то, что они и пропорціональны между собою, доказано будетъ

ТЕОРЕМА 2.

83) *Ежели будетъ* $A : B = C : D$, *то будетъ также и*

1) $B : A = C : D$ [D : C]
2) $A \pm B : A = C \pm D : C$
3) $A \pm B : B = C \pm D : D$
4) $A : A \pm B = C : C \pm D$
5) $B : A \pm B = D : C \pm D$
6) $A + B : A - B = C + D : C - D$
7) $A - B : A + B = C - D : C + D$
8) $A : nB = C : nD$
9) $nA : B = nC : D$
10) $B : nA = D : nC$
11) $nB : A = nD : C$
12) $mA : mB = C : D$
13) $mA : nB = mC : nD$
14) $nB : mA = nD : mC$
15) $\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{m} : \frac{D}{n}$
16) $\frac{B}{n} : \frac{A}{m} = \frac{D}{n} : \frac{C}{m}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Къ доказательству истинны сихъ перемѣнъ ничего болѣе не требуется, какъ доказать что въ нихъ произведенiе среднихъ равно произведенiю крайнихъ. И понеже порядокъ, какъ доказывать истинну сихъ, перемѣнъ, есть для всѣхъ почти одинакъ; то довольно будетъ ради краткости, показать справедливость только нѣкоторыхъ. И такъ начиная отъ первой $B : A = D : C$. Ежели сiя пропорцiя справедлива, то должно быть $A \times D = B \times C$. Но по положенiю должно быть $A \times D = B \times C$; слѣдовательно пропорцiя первая справедлива.

2) Ежели пропорцiя $A \pm B : A = C \pm D : C$ должна имѣть мѣсто, то должно быть произведенiе среднихъ равно произведенiю крайнихъ, то есть:

$$A \times C \pm C \times B = A \times C \pm A \times D.$$

Но $A \times C = A \times C$ и $C \times B = A \times D$ по положенiю; слѣдовательно въ сей перемѣнѣ произведенiе среднихъ равно произведенiю крайнихъ, и пропорцiя истинна.

3)

3) Ежели пропорція $A \pm B : B = C \pm D : D$ истинна, то въ ней произведеніе среднихъ должно быть равно произведенію крайнихъ, то есть

$$A \times D \pm B \times D = B \times C \pm B \times D.$$

Но $B \times D = B \times D$ и $A \times D = B \times C$, слѣдовательно несомнѣнной признакъ имѣетъ мѣсто, и пропорція истинна.

4) Перемѣны четвертая и пятая суть обратныя третей и четвертой; и по сему о вѣрности ихъ, когда уже перьвая доказана, сомнѣваться не можно.

6) Ежели пропорція $A + B : A - B = C + D : C - D$ истинна, то должно доказать, что въ ней произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ. На сей конецъ умножь $A + B$ на $C - D$, и $A - B$ на $C + D$, и будетъ $(A + B) \times (C - D) = (A + B) \times C - (A + B) \times D = A \times C + B \times C - B \times D, A \times D - B \times D$.
Такимъ же образомъ $(A - B) \times (C + D) = (A - B) \times C + (A - B) \times D = A \times C - C \times B + A \times D - B \times D$ и должно быть.

$$A \times C + B \times C - A \times D - B \times D = A \times C - C \times B + A \times D - B \times D.$$

Но

Но $A \times C = A \times C$ и $-B \times D = -B \times D$ и притомъ $B \times C = A \times D$ по положенію, слѣдовательно произведенія суть равны, и пропорція справедлива. Что седьмая перемѣна справедлива, такимъ же образомъ доказать можно

8) Ежели пропорція $A : nB = C : nD$ истинна, то должно быть $n \times A \times D = n \times B \times C$; но по положенію $A \times D = B \times C$: слѣдовательно будетъ и $n \times A \times D = n \times B \times C$ (§ 54). Равнымъ образомъ доказать можно истинну и другихъ перемѣнъ.

ТЕОРЕМА 3.

84) *Ежели количества* A, B, C, D *всѣ будутъ одинакаго роду, и притомъ* $A : B = C : D$, *то сверхъ пропорцій въ прежней теоремѣ доказанныхъ, будетъ*

$$A : C = B : D \quad \text{и}$$
$$A \mp C : B \mp D = A : B = C : D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сію теорему можно доказать, такъ, какъ прежнюю. Надлежитъ доказать;

казать, что въ сихъ перемѣнахъ произведенія среднихъ и крайнихъ суть равны между собою. По сему; ежели пропорція $A : C = B : D$ справедлива, то должно быть $A \times D = B \times C$: Но по положенію должно быть $A \times D = B \times C$. Слѣдовательно пропорція $A : C = B : D$ справедлива.

Такимъ же образомъ, ежели пропорція $A \mp C : B \mp D = A : B$ имѣетъ мѣсто, то должно быть $(A \pm C) \times B = (B \mp D) \times A$, или $A \times B \mp C \times B = A . B \mp A \times D$. Но понеже $A \times B = A \times B$ и $\pm C \times B = \pm A \times D$ по положенію. Слѣдовательно въ пропорціи $A \mp C : B \mp D = A : B$ произведеніе среднихъ равно произведенію крайнихъ, и пропорція истинна.

Слѣдствіе.

85) Ежели дано будетъ много содержаній между собою равныхъ, какъ $A : B$, $C : D$, $E : F$, $G : H$, то есть

$$A : B = A : B$$
$$C : D = A : B$$
$$E : F = A : B$$
$$G : H = A : B,$$

то будетъ $A \mp C + E \mp G : B \mp D + F \mp H = A : B$.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 4.

86) *Ежели будутъ четыре количества* A, B, C, D *пропорціональны, т. е.* A : B = C : D *и одинакаго роду съ количествами пропорціональными* P, Q, R, S, *т. е.* P : Q = R : S, *то будетъ* AP : BQ = CR : DS.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже

A : B = C : D и P : Q = R : S
P Q P Q C D C D

то по § 83 будетъ

AP : BQ = CP : DQ и CP : DQ = CR : DS,

а когда два содержанія равны третьему, то оныя и между собою будутъ равны, слѣдовательно

AP : BQ = RC : SD.

Слѣдствіе 1.

87) Ежели будетъ A : B = C : D
и P : Q = R : S
и притомъ B = P; то будетъ
A : Q = CR : DS,
и ежели будетъ B = P и C = S или A = Q и R = D; то въ первомъ случаѣ произойдетъ
A : Q = R : D,
а во второмъ P : B = C : S.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

88) Ежели будетъ много пропорцій, напр:

$$A:B=C:D$$
$$E:F=G:H$$
$$I:K=L:M$$

то будетъ AEI : BFK = CGL : DHM, и ежели будетъ E = B, F = I, то произойдетъ

$$A:K=CGL:DHM.$$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 15.

89) Ежели будетъ
$$A:B=K:L$$
$$B:C=M:N$$
$$C:D=P:Q$$
$$D:E=R:S$$

т. е. терминъ послѣдующей содержанія A : B будетъ предъидущей содержанія B : C, а сего послѣдующей будетъ предъидущей содержанія C : D, и такъ далѣе. Потомъ всякое изъ сихъ содержаній уравнено будетъ другимъ содержаніямъ, какъ A : B = K : L, B : C = M : N, то содержаніе A : C называется *сложенное* [Composita] изъ содержаній A : B и B : C, или изъ содержаній K : L и M : N. Содержаніе A : D будетъ сложено изъ содержаній A : B, B : C, C : D, или имъ равныхъ изъ содержаній K : L, M : N, P : Q, потому что въ первомъ случаѣ будетъ A : C = KM : LN, а въ другомъ A : D = KMP : LNQ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 19.

90) Ежели содержанія A : B, B : C, C : D, D : E будутъ между собою равны, и слѣдовательно K : L = M : N = P : Q = R : S; тогда содержаніе A : C, которое сложено изъ двухъ равныхъ A : B и B : C называется *удвоенное* [duplicata] содержанія A : B или B : C или K : L или M : N, потому что будетъ A : C = KK : LL = MM : NN. А ежели какое содержаніе сложено будетъ изъ трехъ какъ A : B, B : C, C : D, то содержаніе A : D называется *утроенное* [Triplicata] содержанія A : B или другаго ему равнаго, потому что въ такомъ случаѣ будетъ A : D = KKK : LLL. А содержаніе A : E будетъ *учетыренное* [Quadruplicata] содержанія A : B или другаго ему равнаго. А въ разсужденіи сихъ сложенныхъ содержаній содержаніе A : B называется *простое* [simplex].

Примѣчаніе.

91) Всякое содержаніе сложено быть можетъ изъ многихъ другихъ и безчисленными образами. Пусть дано будетъ содержаніе A : E, и надлежало бы оное сложить

изъ

изъ четырехъ другихъ, то должно взять три какие нибудь термина B, C, D, и пусть будетъ A : B = M : N
B : C = O : P
C : D = Q : R
D : E = S : F

Содержанie A : E будетъ сложено изъ четырехъ содержанiй A : B, B : C, C : D, и D : E, или имъ равныхъ M : N, O : P, Q : R, S : T. Подобнымъ образомъ можно его здѣлать сложеннымъ изъ двухъ, трехъ и болѣе. И такъ всякое содержанie смотря на то, какъ изъ другихъ произходитъ, можетъ назваться простымъ, сложеннымъ изъ сколька нибудь содержанiй, то есть удвоеннымъ и утроеннымъ и проч:

ГЛАВА ТРЕТIЯ.

О ЛОМАНЫХЪ ЧИСЛАХЪ ИЛИ ДРОБЯХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 20.

92) Дробь *меньше единицы* или *истинная* [Fractio vera], въ которой знаменатель больше, нежели числитель, какъ напримѣръ $\frac{3}{4}$. *Дробь больше единицы* [fractio ſpuria], въ которой числитель больше знаменателя, какъ напри-

напримѣръ $\frac{5}{3}$. *Дробь равна единицѣ*, въ которой знаменатель равенъ числителю, напримѣръ $\frac{6}{6}$, или $\frac{5}{5}$.

Примѣчанїе.

93) Происхожденїе дробей иные производятъ отъ дѣленїя, и называютъ дробь частнымъ числомъ, которое происходитъ отъ дѣленїя, когда дѣлитель въ дѣлимомъ числѣ не совершенно нѣсколько разъ содержится, тогда дѣлитель будетъ знаменатель, а дѣлимое число числитель; отъ сего видно, что дробь показываетъ, сколько разъ знаменатель содержится въ числителѣ.

94) Хотя и кажется, что сей способъ представлять дроби отъ перьваго разнится, однакожъ въ самомъ дѣлѣ оба совершенно между собою сходствуютъ. Чтобъ сїе сходство видно было, возмемъ въ примѣръ дробь $\frac{5}{4}$, которая по прежнему опредѣленїю (§ 9) значитъ, что когда цѣлое или единица, къ которой сїя дробь относится, раздѣлится на четыре равные части, и ихъ возмется 5, то будетъ $\frac{5}{4}$. А по сему дробь $\frac{5}{4}$ означаетъ частное число, когда цѣлое 5 раздѣлится на 4, или цѣлаго 5ти возмется четвертая часть. Слѣдовательно въ послѣднемъ случаѣ $\frac{5}{4}$ означаетъ четвертую

часть

часть числа 5 ; изъ сего видно , что ломаное число показываетъ такую часть верьхняго числа , какую нижнее число означаетъ. Но 5 есть впятеро больше единицы , къ которой сіе число относится , слѣдовательно и четвертая его часть будетъ впятеро больше четвертой части единицы. Изъ сего явствуетъ, что дробь $\frac{5}{4}$ или четвертая часть пяти единицъ равна пяти частямъ , которыхъ четыре составляютъ единицу , и сходство сихъ представленій видно. По сему все, что доказано выше сего о дѣлителѣ и о дѣлимомъ числѣ вообще , тожъ и при дробяхъ или ломаныхъ числахъ мѣсто имѣть должно.

95) Дробь больше единицы можетъ раздѣлена быть на двѣ части , изъ которыхъ одна будетъ цѣлое число , а другая истинная дробь , для того что всякая дробь означаетъ частное число. И такъ когда дана будетъ дробь больше единицы , то ничего больше не требуется , какъ здѣлать обыкновенное дѣленіе. Напримѣръ $\frac{16}{5}$ показываетъ , что 16 должно раздѣлить на 5 , и частное число будетъ $3\frac{1}{5}$. Изъ сего видно , коимъ образомъ дробь больше единицы превращается въ двѣ части. Сіе дѣйствіе называется *изъ дроби больше единицы выключить цѣлое число.* Противнымъ образомъ поступать надлежитъ , ежели надобно будетъ цѣлое число съ дробью превратить въ дробь больше единицы. Надлежитъ

 знамена-

знаменателемъ дроби умножить цѣлое число, къ произведенiю придать числителя данной дроби, и подъ суммою подписать прежняго знаменателя. Напр: $\frac{14}{3}$ даетъ $4\frac{2}{3}$, что превращено будетъ въ дробь слѣдующимъ образомъ: $\frac{4\times3+2}{3}=\frac{14}{3}$. Обѣ сiи перемѣны основанiе имѣютъ на дѣленiи: Когда дробь больше единицы раздѣляется на двѣ части, тогда не иное что дѣлается, какъ ищется частное число; А когда цѣлое число съ дробью приводится въ дробь, тогда находится дѣлимое число.

ЗАДАЧА 6.

96) *Данныя дроби приводить къ одинакому знаменателю.*

РѢШЕНIЕ.

Понеже частнаго числа или дроби сила не перемѣняется, когда знаменатель и числитель умножены будутъ на какое нибудь число (§. 60) и приводить дроби къ одинакому знаменателю, есть превращать дроби въ другiя имъ равныя, чтобъ всѣ одинакiя части цѣлаго показывали. Изъ сего видно, что ежели бы.

1) Даны были дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, и когда первой дроби знаменателя и числителя умножишь знаменателемъ второй, то сила

ея

ея не перемѣнится, и будетъ $\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{2}{3}$. Такимъ же образомъ, когда вторрой дроби знаменателя и числителя умножишь на знаменателя перьвой дроби, то она не перемѣнится, и произойдетъ $\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}$, и данныя дроби превращены будутъ въ слѣдующія $\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$; $\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$, у которыхъ знаменатели будутъ одинаки.

2) Подобнымъ образомъ, ежели даны будутъ три дроби, какъ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, или болѣе, приведены будутъ къ одинакому знаменателю. Оба знака перьвой дроби должно умножить на знаменателей второй и третьей дроби, и произойдетъ $\frac{2\times4\times7}{3\times4\times7}$. Потомъ второй дроби оба знака должно умножить на знаменателей перьвой и третьей дроби. И наконецъ оба знака третьей на знаменателей перьвой и второй, и произойдетъ изъ первой $\frac{2\times4\times7}{3\times4\times7}$ изъ второй $\frac{3\times3\times7}{4\times3\times7}$, а изъ третьей $\frac{6\times3\times4}{7\times3\times4}$, и искомые дроби будутъ $\frac{56}{84}$, $\frac{63}{84}$, $\frac{72}{84}$.

3) Изъ сего можно видѣть, какъ поступать дожно, ежели случится

большее число дробей. Надлежитъ всякой дроби умножить числителя и знаменателя на знаменателей прочихъ дробей, и что въ задачѣ требовалась, учинено будетъ.

ЗАДАЧА 7.

97) *Дроби разныхъ знаменателей складывать.*

РѢШЕНІЕ.

Какъ въ цѣлыхъ числахъ, такъ и здѣсь не отмѣнно требуется, чтобъ дроби были одинакаго роду. Пусть будутъ данныя дроби $\frac{5}{7}+\frac{8}{9}+\frac{10}{13}$: Надлежитъ привесть ихъ къ одинакому знаменателю, и произойдетъ $\frac{585}{819}+\frac{728}{819}+\frac{630}{819}$. Такимъ образомъ всѣ данныя дроби будутъ показывать одинакія части цѣлаго, то есть каждое ломаное число содержитъ столько частей цѣлаго, сколько показываетъ его числитель; Чего ради складывать такія дроби не что иное есть, какъ сыскать то, сколько всѣхъ такихъ частей числомъ находится, и для того ничего больше не требуется, какъ сложить

всѣхъ

всѣхъ числителей, и подъ суммою подписать общаго знаменателя. По сему искомая сумма будетъ $\frac{1943}{819} = 2\frac{305}{819}$ (§ 93).

Примѣчанїе.

98) Ежели при дробяхъ случатся цѣлые числа, то надлежитъ цѣлые сложить особливо, и дроби особливо, Напримѣръ, ежели бы дано было сложить $2\frac{1}{3} + 5\frac{1}{7}$ сумма будетъ $= 7 + \frac{14}{51} = 7\frac{14}{15}$. $\frac{8}{75}$.

ЗАДАЧА 8.

99) *Изъ данной дроби другую данную вычесть.*

РѢШЕНIЕ.

И здѣсь полагаю, что данныя дроби, какъ въ прежней задачѣ, имѣютъ разныхъ знаменателей, и суть одного роду Пусть дроби будутъ $\frac{1}{2} - \frac{1}{12}$. Должно привесть ихъ къ одинакому знаменателю, и произойдетъ $\frac{12}{24} - \frac{2}{24}$. Тогда будутъ они содержать равныя части цѣлаго, каждая по стольку частей, сколько показываетъ числитель, и вычитать должно числителя мень-

шаго изъ большаго , а подъ остаткомъ подписывать общаго знаменателя. Такимъ образомъ данныхъ дробей разность будетъ $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$.

Примѣчанїе 1.

100) Ежели при дробяхъ случатся цѣлые чи́сла , то должно цѣлые изъ цѣлыхъ а дроби изъ дробей вычитать. Напримѣръ $4\frac{1}{3}-2\frac{2}{9}$, остатокъ будетъ $=2\frac{3}{27}=2\frac{1}{9}$. А когда будетъ вычитаемая дробь больше той , изъ которой вычитанїе дѣлать должно , и при такихъ дробяхъ будутъ еще цѣлые чи́сла , то отъ цѣлаго числа̀ при меньшей дроби находящагося занимается столько единицъ , сколько потребно , чтобъ вычитанїе здѣлать можно было. Напримѣръ $4\frac{1}{3}-2\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$. $=1\frac{14}{15}$.

Примѣчанїе 2.

101) Понеже ломаное число не перемѣняется , ежели оба его термина умножены будутъ на какое нибудь цѣлое число. Напримѣръ $\frac{N}{D}=\frac{M\times N}{M\times D}$ (§ 93 , 60). Изъ сего слѣдуетъ , что всякая дробь безчисленными образами изображена быть можетъ. Противнымъ образомъ такїе ломаные чи́сла , которыхъ знаменатель и числитель состоятъ изъ многихъ знаковъ , можно изображать меньшимъ числомъ знаковъ , ежели оба ломанаго

числа̀

числа термины раздѣлены будутъ на числа, которыми термины умножены. Напримѣръ ломаное число $\frac{3}{4}$, когда оба его термины умножены будутъ M, взявши вмѣсто M какое нибудь число, напримѣръ 5 или другое какое, превратится въ равное себѣ въ $\frac{3M}{4M}$ или въ $\frac{15}{20}$. А когда ломаное числа $\frac{15}{20}$ числитель и знаменатель раздѣлены будутъ на 5, то произойдетъ прежнее $\frac{3}{4}$ ломаное число. Изъ сего явствуетъ, что когда какую нибудь дробь надобно изобразить меньшими числами, то должно искать число, на которое знаменатель и числитель предложенной дроби раздѣлены быть могутъ. Такое число называется *общей дѣлитель*; а *общей большей дѣлитель* [Diuisor Communis Maximus] есть самое большое число, на которой данной дроби знаменатель и числитель раздѣлены быть могутъ.

102) Понеже дроби лучше понимаемъ, когда они малымъ числомъ знаковъ изображены бываютъ, то необходимо вѣдать должно, какъ предложенную дробь уменьшать, или находить большаго общаго дѣлителя.

ЗАДАЧА 9.

103) *Даннымъ двумъ числамъ сыскать большаго общаго дѣлителя.*

РѢШЕНІЕ.

Изъ данныхъ двухъ чиселъ надлежитъ раздѣлить большее на меньшее. Потомъ остатокъ произшедшей отъ дѣленія возми за дѣлителя, а прежнаго дѣлителя за дѣлимое число и дѣлай новое дѣленіе. Такимъ образомъ продолжай дѣленіе принимая остатокъ отъ дѣленія произшедшей задѣлителя, а дѣлителя самого задѣлимое число въ слѣдующемъ дѣленіи, и сіе должно продолжать до тѣхъ поръ пока въ дѣленіи ничего неостанется. Тогда общей большей дѣлитель будетъ дѣлитель самаго послѣдняго дѣленія. Напримѣръ пусть дано будетъ сыскать общаго большаго дѣлителя чиселъ 64 и 2864. Должно 2864 раздѣлить на 64.

```
                64 ) 2864 ( 44
                     256
                     ---
                      304
                      256
                      ---
1 остатокъ             48 ) 64 | 1
                            48 |
                            -- |
2 остатокъ                  16 | 48 ( 3
                                 48
                                 --
                                  0
```

Слѣ-

Слѣдовательно общей большей дѣлитель предложенныхъ чиселъ будетъ 16.

Примѣчаніе.

104) Когда общей большей дѣлитель найдется единица, то сіе показываетъ, что данные чи́сла общаго дѣлителя не имѣютъ, ибо всякое число на 1цу и само на себя раздѣлено быть можетъ. Доказательство сего рѣшенія послѣ сообщено будетъ.

ЗАДАЧА 10.

105) *Данное ломаное число уменьшить, или изобразить меньшими числами.*

РѢШЕНІЕ.

Сыскавъ по § 103 общаго большаго дѣлителя числителя и знаменателя данной дроби, раздѣли на него оба термина ломанаго числа̀. Такимъ образомъ ломаное число изображено будетъ самыми малыми числами. Пусть будетъ данное ломаное число $\frac{345}{759}$, котораго общей большой дѣлитель будетъ 69, и для того будетъ $\frac{345}{759} = \frac{69 \times 5}{69 \times 11} = \frac{5}{11}$.

При-

Примѣчаніе.

106) Когда случится уменьшать дробь больше единицы, то надлежитъ сперва выключить изъ оной цѣлое число, а потомъ искать, для истиннаго ломанаго числа́ большаго общаго дѣлителя.

ЗАДАЧА 11.

107) *Данную дробь на другую умножить.*

РѢШЕНІЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ одно ломаное число $=\frac{A}{B}$, а другое $=\frac{M}{N}$, которые между собою умножить должно, и произведеніе пусть будетъ $=P$, по § 77 будетъ

$$1 : \tfrac{A}{B} = \tfrac{M}{N} : P \text{ и}$$

B : A ~~A : B~~ $= M : N \times P$ (§ 83)

слѣдовательно $A \times M = B \times N \times P$ (§ 80)

$$\text{и } P = \frac{A \times M}{B \times N}$$

т. е. надлежитъ умножить числителей между собою и знаменателей порознь, произведеніе числителей дастъ числителя искомаго ломанаго числа́, а произведеніе знаменателей дастъ

знаме-

знаменателя. Напримѣръ пусть дано будетъ умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{6}$, произведенїе будетъ $=\frac{3\times5}{4\times6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Слѣдствїе.

108) И такъ, когда цѣлымъ числомъ дробь, или дробью цѣлое число умножать должно, въ такомъ случаѣ надлежитъ только цѣлымъ числомъ умножить числителя, и подъ произведенїемъ подписать даннаго знаменателя.

ЗАДАЧА 12.

109) *Данную дробь на другую раздѣлить.*

РѢШЕНІЕ И ДОКАЗТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ данные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{M}{N}$, изъ которыхъ $\frac{A}{B}$ дѣлитель, а $\frac{M}{N}$ дѣлимое число, частное искомое число пусть будетъ $=Q$ по § 77 будетъ.

$$\frac{A}{B} : 1 = \frac{M}{N} : Q$$

$$A : B = M : NQ \qquad (§ 83)$$

и $ANQ = BM$ (§ 80)

слѣдовательно $Q=\frac{B\times M}{A\times N}$.

то есть должно знаменателемъ дѣлителя

теля умножить числителя дѣлимаго числа̀, потóмъ числителемъ дѣлителя умножить знаменателя дѣлимаго числа̀. Перьвое произведенїе дастъ числителя искомой дроби, второе знаменателя. Напримѣръ пусть дано будетъ раздѣлить $\frac{2}{5}$ на $\frac{1}{3}$, частное число будетъ $=\frac{2\times3}{5\times1}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

Слѣдствїе.

110) Когда случится ломаное число дѣлить на цѣлое, то надлежитъ только умножить дѣлителемъ знаменателя предложенной дроби. Изъ сего также и то видно, какъ поступать должно, ежели дѣлитель будетъ ломаное число, а дѣлимое цѣлое.

Примѣчанїе.

111) Когда случится умножать или дѣлить цѣлое число съ дробью на цѣлое число съ дробью, то способнѣе умноженїе и дѣленїе здѣлано быть можетъ, ежели въ перьвомъ случаѣ множитель и множимое число, а во второмъ дѣлитель и дѣлимое число превращены будутъ въ дроби напримѣръ пусть будетъ множитель $5\frac{4}{5}$, множимое число $12\frac{2}{3}$ вмѣсто того, чтобъ по частямъ умножать, надлежитъ

житЪ превратить вЪ дроби оба фактора, и произойдетЪ $5\frac{4}{5}=\frac{29}{5}$; $12\frac{2}{3}=\frac{38}{3}$. СлѣдовательЬ произведенїе будетЪ $=\frac{29\times 38}{5\times 3}=\frac{1102}{15}=73\frac{7}{15}$ (§ 107). Пусть будетЪ дѣлитель $2\frac{2}{3}$, а дѣлимое число $=5\frac{3}{4}$. НадлежитЪ сперьва превратить вЪ дроби, и будетЪ $2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$; $5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}$. Частное число будетЪ $=\frac{23\times 3}{8\times 4}=2\frac{5}{32}$. (§ 109).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О ЧИСЛАХЪ КВАДРАТНЫХЪ И КУБИЧНЫХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 21.

112) Ежели какое нибудь число само на себя умножится, то произведенїе называется *квадратное число* [Numerus Quadratus] : Число, которое на себя умножается вЪ разсужденїи произведенїя *корень квадратной* [Radix quadrata]. НапримѢрЪ числа 5 квадратное число будетЪ 25, а корень 5.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 22.

113) Ежели квадратЪ еще умножится на корень, то произведенїе называется *кубЪ* [Cubus], а корень вЪ разсужденїи

разсужденіи куба называется *корень кубичной* [Radix Cubica] такъ напр: 5 квадратъ есть 25 , кубъ 125 , а куба 125 корень кубической 5.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 23.

114) Вообще произведенія произшедшіе изъ факторовъ между собою равныхъ называются *степени* [Potentiæ seu Potestates]. *Вторая степень* [Pot: secunda] называется произведеніе происходящее отъ умноженія какого нибудь числа на себя , или когда число два раза въ умноженіе входитъ. *Третья степень* [Pot: tertia] когда тожъ число три раза входитъ въ умноженіе , и такъ далѣе Такъ числа 4 вторая степень будетъ $=4\times4=16$; третья степьнь $4\times4\times4=64$, четвертая степень $4\times4\times4\times4=246$. А самое число 4 , въ разсужденіи 16ти называется *корень второй степьни* , въ разсужденіи 64 будетъ *корень третей степьни*, и такъ далѣе.

ПОЛОЖЕНІЕ.

115) Когда какое нибудь число , напримѣръ А на себя умножится , то квадратъ

квадратъ онаго означается слѣдующимъ образомъ : AA или A^2, кубъ A^3, биквадратъ или четвертая степень означается чрезъ A^4 и далѣе, такъ что число въ верьху корня отъ правой рукѝ приписанное означаетъ всегда степень, и называется *експонентъ* или *указатель степени* [Exponens].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 24.

116) *Изплекать корень квадратной* [Extrahere Radicem quadratam] изъ числа̀ какого нибудь, есть способъ находить число, которое на себя будучи умножено, дастъ самое предложенное число. *Изплекать корень кубичной* [Radicem cubicam] будетъ способъ находить число, котораго квадратъ умноженной на найденное число, дастъ самое предложенное.

ПОЛОЖЕНІЕ 5.

117) *Когда изъ какого нибудь числа, напримѣръ* A *должно изплечь корень квадратной, то сїе означается слѣдующимъ образомъ* $\sqrt[2]{A}$

Е *или*

или просто $\sqrt{A}$. *А когда должно изплечь корень кубичной, то означается, какъ слѣдуетъ,* $\sqrt[3]{A}$. *Бикпадратной* $\sqrt[4]{A}$, *или пообще* $\sqrt[n]{A}$, *ежели за* n *позмется какое нибудь число. Сей знакъ особлипо употребляется при такихъ числахъ, изъ которыхъ сопершенно корня изплечь не можно, напр:* $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. *Такіе числа называются* иррацїональные *или* глухіе [Irrationales или surdi]. *А знакъ* $\sqrt{}$ *называется* радикальной.

Примѣчанїе.

118) Всякаго числа̀ чрезъ умноженїе можно найти всякую степень; Напротивъ того не столь легко изъ даннаго числа̀ корень какой нибудь извлечь можно, на пр: квадратной или кубичной. Понеже въ общемъ житїи сїи два извлеченїя не рѣдко случаются, то не обходимо надлежитъ показать, какъ извлекать должно изъ даннаго числа̀ корень квадратной или кубичной.

ТЕОРЕМА 5.

119) *Ежели какое нибудь число* M *раздѣлено будетъ на дпѣ части*

A и B, то есть, что бы было M $=A+B$; то квадратъ сего числа состоять будетъ изъ квадрата первой части, изъ произведенія обѣихъ частей дважды взятаго, и изъ квадрата послѣдней части, то есть

$$M^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Чтобъ найти M^2 должно $A+B$ умножить на $A+B$. И такъ должно сперьва умножить $A+B$ на A, произведеніе будетъ A^2+AB, потомъ $A+B$ умножить на B, и найдется произведеніе $AB+B^2$. Сумма сихъ произведеній должна быть равна произведенію $A+B$ на $A+B$, то есть $MM=(A+B)^2=AA+AB+AB+BB=AA+2AB+BB$.

Слѣдствіе 1.

120) По сему всякаго числа квадратъ найти можно. Пусть будетъ данное число 25, раздѣли его на двѣ части $20+5$, и квадратъ его будетъ состоять

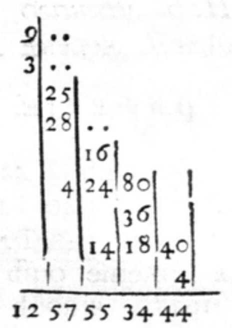
изъ □ первой части	20×20 = 4 . .
изъ произведенія частей 2жды взятаго	40×5 = 2 . .
изъ □ послѣдней части	5×5 = 25
Искомой квадратъ будетъ	625.

Слѣдствіе 2.

121) Подобнымъ образомъ можно квадратъ найти и другаго всякаго числа́, въ которомъ не только десятки, но и сотни, тысячи и всякаго вышшаго знаменованія единицы находятся. Пусть будетъ число, котораго квадратъ сыскать должно 35462. Начиная отъ лѣвой рукѝ надлежитъ взять первые два знака 35, и представить въ умѣ, будто бы другихъ не было, и искать по § 119, 120 оныхъ квадратъ. Въ силу онаго число 35 должно раздѣлить на двѣ части, какъ слѣдуетъ 30+5, и квадратъ 35 будетъ состоять изъ квадрата 30, изъ произведенія 30+5 дважды взятаго, и изъ квадрата 5: такимъ образомъ найдется квадратъ 35=1225. Теперь къ 35 надлежитъ присовокупить слѣдующей знакъ даннаго числа̀, и будетъ 354. Чтобъ сего числа̀ найти квадратъ, должно оное раздѣлить на двѣ части, какъ слѣдуетъ 350+4. И какъ прежде квадратъ 354 будетъ состоять изъ квадрата 350, изъ произведенія 350×4 дважды

взятаго,

взятаго, и изъ квадрата 4, и найдется квадратъ 354=125316. Присовокупи слѣдующей знакъ даннаго числа 6, и будетъ число, котораго квадратъ сыскать надлежитъ 3546. Раздѣливши оное на двѣ части 3540+6, должно взять квадратъ числа 3540, къ нему придать произведенiе 3540×6 дважды взятое, и квадратъ послѣдней части 36. Такимъ образомъ найдется квадратъ числа 3546=12574116. Напослѣдокъ должно присовокупить и послѣдней знакъ даннаго числа 2. Раздѣливши число 35462 на двѣ части 35460+2 поступай по прежнему, и найдется квадратъ искомаго числа 1257553444 Образецъ дѣйствiя, въ которомъ всѣ сложенiя къ концу оставлены, есть слѣдующей.



Примѣчанiе.

122) По сему всякаго числа квадратъ найти можно, ежели квадраты перьвыхъ

 девяти

девяти знаковъ будутъ извѣстны. Когда надобно изъ даннаго числа̀ найти корень, то должно поступать противнымъ образомъ, т. е. что здѣсь придавано, то въ извлеченіи вычитать надлежитъ.

Таблица квадратовъ и кубовъ перьвыхъ девяти знаковъ.

Корни	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадраты	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Кубы	1	8	27	64	125	216	343	512	729

ЗАДАЧА 13.

123) *Изъ даннаго квадратнаго числа извлечь корень квадратной.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ данное число 1257553444. Прежде всего надлежитъ данное число раздѣлить на классы, начиная дѣленіе отъ правой руки къ лѣвой, такъ чтобъ во всякомъ классѣ находилось по два знака, выключая послѣдней, въ которомъ и одинъ случиться можетъ.

```
         12|57|55|34|44 (35462
          9
6)        3|57
          3|0
           |25
70)        |32|55
           |28|0
           |  |16
708)      4|39|34
          4|24|8
              |36
7092)      14|18|44
           14|18|4
              |  |4
             0
```

Потóмъ 1) въ таблицѣ квадратовъ и кубовъ сыщи квадратъ ближайшей къ знакамъ находящимся въ перьвомъ отъ лѣвой рукѝ классѣ. Въ семъ случаѣ будетъ 9 Корень его 3 напиши возлѣ послѣдней черты отъ правой рукѝ, а квадратъ вычти изъ знаковъ въ перьвомъ классѣ находящихся, и останется 3.

2) Къ остатку присовокупи слѣдующаго класса перьвой знакъ, и будетъ 35; потóмъ найденной перьвой

 знакъ

знакъ корня умножь на 2, и спрашивай, сколько разъ произведенїе 6 въ 35 содержится. Частное число 5 будетъ второй знакъ корня, которое должно написать на второмъ мѣстѣ.

3) Подъ 35, какъ подъ дѣлимымъ числомъ, подпиши произведенїе найденнаго частнаго числа̀ на дѣлителя, потóмъ къ 35 присовокупи и второй знакъ класса, а къ произведенїю найденнаго частнаго числа̀ на дѣлителя, приложи квадратъ частнаго новаго числа̀, такъ чтобъ послѣдней знакъ квадрата соотвѣтствовалъ послѣднему знаку класса, и сумму вычти изъ 357, въ остаткѣ будетъ 32.

4) Къ сему остатку присовокупи первой знакъ слѣдующаго класса, и будетъ 325; и какъ прежде умноживъ найденную часть корня 35 на 2, спрашивай, сколько разъ сїе произведенїе, которое обыкновенно, какъ дѣлитель, отъ лѣвой стороны̀ пишется, содержится въ 325: частное число 4 будетъ третей знакъ корня.

5) Подъ числомъ 325 подпиши произведенїе частнаго числа̀ на дѣлителя,

теля, наблюдая всегда то, чтобъ перьвой знакъ отъ правой руки произведенія соотвѣтствовалъ перьвому знаку класса. Снеси потомъ и другой знакъ класса, чтобъ было 3255, и къ помянутому произведенію придай квадратъ новаго частнаго числа, такъ чтобъ послѣдней знакъ квадрата соотвѣтствовалъ послѣднему знаку класса, и сумму вычти изъ 3255, останется 339.

6) Къ остатку надлежитъ присовокупить перьвой знакъ слѣдующаго класса, и такимъ же образомъ, какъ выше дѣлано, продолжать извлеченіе далѣе, и найдется искомой корень предложеннаго числа 35462.

Примѣчаніе.

124) Въ самомъ рѣшеніи содержится и доказательство. Всѣ знаки корня нахожены противнымъ тому образомъ, какъ искали въ § 121 квадратъ даннаго числа. Кто снесетъ сіе извлеченіе съ дѣйствіемъ въ § 121 изображеннымъ, тотъ въ тонкость уразумѣетъ показанное извлеченіе. При нахожденіи частнаго числа не всегда такъ поступать, какъ въ простомъ дѣленіи показано,

зано, но притомъ должно смотрѣть иногда на слѣдующей знакъ класса, и на сумму, которая вычитается, то есть на произведенїе изъ частей дважды взятое и сложенное съ квадратомъ послѣдней части. Ежели сїя сумма будетъ больше, нежели число, изъ котораго вычитать надлежитъ, то хотя бы частное число было и справедливо, однакожъ должно будетъ задавать меньшимъ знакомъ.

125) Когда случится, что въ остаткѣ вмѣстѣ съ присовокупленнымъ слѣдующаго класса первымъ знакомъ произведенїе найденной уже части корня 2 жды взятое не содержится ни разу, то написавши въ корнѣ 0 надлежитъ еще снесть два знака послѣдующаго класса, напримѣръ:

```
          9|63|48|16|3104
          9|  |  |  |
    6)     |63|  |  |
           |61|  |
  620)      2|48|16
            2|48|16
          ----------
              0
```

Слѣдствїе.

126) Понеже квадратъ дроби, напр: $\frac{5}{7}$ находится, ежели числителя и знаменате-

ля

ля возмешь квадраты, квадратъ числителя дастъ числителя, и квадратъ знаменателя дастъ знаменателя искомой квадрата дроби $\frac{25}{49}$. Слѣдовательно когда изъ дроби должно корень извлекать, то должно извлечь изъ числителя особливо, изъ знаменателя особливо.

Примѣчанїе.

127) Понеже не всѣ чи́сла суть совершенные квадраты, то есть не произходятъ чрезъ умноженїе какого нибудь числа̀ на себя, то и корней совершенныхъ не всѣхъ чиселъ имѣть можно. Однакожъ можно найти такой корень, которой бы отъ совершеннаго чувствительно не разнился, что показано будетъ въ слѣдующемъ предложенїи:

ЗАДАЧА 14.

128) *Изъ числа, которое не совершенной квадратъ, извлечь корень квадратной, которой бы безъ чувствительной погрѣшности за истинной принять можно было.*

РѢШЕНІЕ.

Данное число раздѣли на классы, и къ нимъ придай отъ правой рукѝ столько классовъ нулей, сколько за

благо разсудится. Потомъ извлекай корень изъ числа, какъ выше показано, и когда всѣ его классы будутъ снесены, то начинай сносить и приданные классы нулей, и съ ними поступай такъ, какъ въ § 123 показано. Понеже приданные нули въ числѣ означали десятичные дроби, и всякой классъ даетъ одинъ знакъ въ корнѣ, то перьвой классъ нулей дастъ въ корнѣ знакъ для десятичныхъ, второй для сотенныхъ, третей для тысячныхъ, и такъ далѣе. Пусть будетъ данное число 549. Понеже оно не совершенной квадратъ, то придай нѣсколько классовъ нулей, какъ слѣдуетъ,

5|49,|00,|00|00|00|00|00|00|

и найдется искомой корень 23,430748, которой когда на себя умножишь, то хотя произведенiе и не будетъ тожъ самое число, однакожъ разность такъ мала, что ее оставить безъ погрѣшности можно.

Примѣчанiе.

129) Изъ сего можно видѣть, какъ должно извлекать корень квадратной изъ

такого

такого числа, при которомъ находятся десятичные дроби. Надлежитъ цѣлые числа раздѣлить на классы особливо, и знаки означающіе десятичные дроби особливожъ, начиная дѣленіе въ десятичныхъ дробяхъ отъ лѣвой руки. Пусть будетъ данное число 804, 3402,682, которое раздѣленное на класы будетъ 804,|34|02|56|82|. А когда въ послѣднемъ классѣ останется одинъ знакъ, то оной классъ дополняется нулемъ. Корень даннаго числа будетъ 28, 3608.

ТЕОРЕМА 6.

130) *Ежели какое нибудь число М раздѣлено будетъ на двѣ части А и В, такъ чтобъ было М=А+В; то будетъ кубъ онаго числа состоять изъ куба первой части, изъ произведенія квадрата первой части на вторую трижды взятаго, изъ произведенія квадрата послѣдней части на первую трижды взятаго, и изъ куба послѣдней части, то есть* $M^3 = A^3 + 3AAB + 3BBA + B^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже кубъ происходитъ, когда квадратъ умножится на корень., т. е. когда $M^2 = AA + 2AB + BB$ умножится на $M = A + B$. Слѣдовательно должно АА

+

$+2AB+BB$ умножить на $A+B$, что учинится умножая $(A+B)^2$ сперьва на A, потомъ на B, сумма произведеній будетъ $=(A+B)^3$.

$$(AA+2AB+BB)\times A = A^3 + 2AAB + ABB$$
$$(AA+\ AB+BB)\times B = \qquad AAB + 2ABB + B^3$$

и такъ будетъ $M^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3AAB + 3ABB + B^3$

Слѣдствіе 1.

130) По сему всякаго числа кубъ, такъ какъ прежде квадратъ, найти можно. Пусть данное число будетъ 34. раздѣли оное на двѣ части 30+4, поступая по § 130: кубъ сего числа найдется слѣдующимъ образомъ:

Кубъ перьвой части	$30\times30\times30 =$	27 . . .
Произв: □ перьвой части на вт: 3 взят.	$3\times30\times30\times4 =$	108 . .
Произв: □ втор: части на перв: 3 взят:	$3\times4\times4\times30 =$	144 .
Кубъ второй части	$4\times4\times4 =$	64

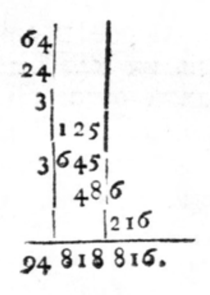
и такъ кубъ даннаго числа будетъ $=39304$.

Слѣдствіе 2.

132) Подобнымъ образомъ не трудно будетъ найти кубъ такого числа, которой состоитъ изъ большаго числа знаковъ, на-

примѣръ

примѣръ 456. Возми первые два отъ лѣвой руки знака, и ищи оныхъ кубъ по прежнему, раздѣливши первые два знака на двѣ части 40+5. Кубъ 45 будетъ состоять изъ куба первой части =64000. Изъ произведенія квадрата первой части на вторую трижды взятаго 3×1600×5=24000; изъ произведенія квадрата второй части на первую трижды взятаго 3×5×5×40=3000, и изъ куба послѣдней части =125. И такъ кубъ 45 будетъ =91125. Присовокупи теперь и слѣдующей знакъ, чтобъ было 456, и раздѣли на двѣ части, какъ слѣдуетъ, 450+6, и такъ кубъ числа 456 будетъ состоять изъ куба 450, изъ произведенія квадрата первой части на вторую трижды взятаго 3×450×450×6=3645000, изъ произведенія квадрата послѣдней части на первую трижды взятаго 3×450×6×6=48600, и изъ куба послѣдней части =216. Такимъ образомъ кубъ искомаго числа будетъ 94818816. Образецъ дѣйствія, въ которомъ всѣ сложенія къ концу оставлены.



64			
24			
3			
	125		
3	645		
	48	6	
		216	

94 818 816.

При-

Примѣчаніе.

133) Изъ сего можно видѣть, что должно дѣлать, когда дается изъ какого нибудь числа извлечь корень кубичной, потому что извлеченіе должно быть противное сему дѣйствіе. Надлежитъ при извлеченіи то вычитать, что здѣсь придавано.

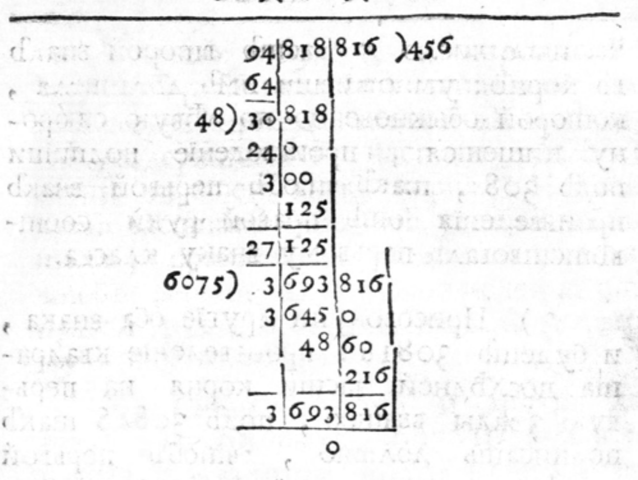
134) Дѣленіе на части можетъ быть учинено и другимъ образомъ, на примѣръ 24 можетъ раздѣлено быть на 20+4, на 15+9, на 12+12 и прочая. Однакожъ первое къ произведенію степеней способнѣе прочихъ, и свойство ихъ изъ сего раздѣленія виднѣе.

ЗАДАЧА 15.

135) *Изъ даннаго кубичнаго числа извлечь корень кубичной.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть данное число будетъ 94818816, которое прежде всего должно раздѣлить на классы, начиная дѣленіе отъ правой руки къ лѣвой, такъ чтобъ во всякомъ классѣ находилось по три знака, выключая послѣдней, въ которомъ одинъ или два остаться могутъ.



1) Сыщи въ таблицѣ кубъ, которой ближе всѣхъ подходитъ къ знакамъ, въ перьвомъ отъ лѣвой руки классѣ находящимся. Корень его напиши отъ правой руки подлѣ послѣдней черты, а самой кубъ вычти изъ знаковъ перьваго отъ лѣвой руки класса. Въ семъ случаѣ корень будетъ 4, а остатокъ 30.

2) Къ остатку присовокупи перьвой знакъ слѣдующаго класса, и будетъ 308, потомъ спрашивай, сколько разъ въ 308 содержится квадратъ найденной перьвой части трижды взятой.

частное число 5 дастъ второй знакъ въ корнѣ: умноживши имъ дѣлителя, которой обыкновенно по лѣвую сторону пишется, произведенїе подпиши подъ 308, такъ чтобъ перьвой знакъ произведенїя отъ правой рукѝ соотвѣтствовалъ перьвому знаку класса.

3) Присовокупи другїе оба знака, и будетъ 30818: произведенїе квадрата послѣдней части корня на перьвую 3 жды взятое, подъ 30818 такъ подписать должно, чтобъ перьвой знакъ сего произведенїя отъ правой рукѝ соотвѣтствовалъ второму знаку класса.

4) Потóмъ возми кубъ послѣдней части, и подъ прежними произведенїями такъ подпиши, чтобъ перьвой знакъ отъ правой рукѝ соотвѣтствовалъ послѣднему знаку класса. Всѣ сїи три произведенїя сложи въ одну сумму, и вычти изъ соотвѣтствующихъ знаковъ куба, остатокъ будетъ 3693.

5) Къ сему остатку припиши перьвой знакъ слѣдующаго класса, то

то будетъ 36938, и спрашивай, сколько разъ квадратъ найденной части корня трижды взятой въ семъ числѣ содержится? Частное число 6 дастъ третей знакъ корня. Найденнымъ частнымъ числомъ умножь дѣлителя, произведенїе подпиши, такъ чтобъ первой знакъ произведенїя отъ правой рукѝ соотвѣтствовалъ первому знаку класса.

6) Снеси потóмъ и другїе два знака, чтобъ было 3693816, и произведенїе квадрата новаго частнаго числà на прочїе знаки корня трижды взятое подпиши такъ, чтобъ первой знакъ произведенїя соотвѣтствовалъ среднему знаку новаго класса, потóмъ кубъ послѣдней части подъ протчими произведенїями подпиши такъ, чтобъ первой знакъ отъ правой рукѝ соотвѣтствовалъ третьему знаку класса.

7) Всѣ сїи произведенїя сложи въ одну сумму, и вычти изъ соотвѣтствующихъ знаковъ куба, и найдется искомой корень 456. Подобнымъ образомъ продолжать должно извлеченїе далѣе при другихъ случаяхъ, наблюдая предписанныя здѣсь прáвила.

Примѣчаніе.

136) Доказательство сего рѣшенія яснѣе можно видѣть, ежели снесешь оное съ дѣйствіемъ въ § 132 описаннымъ. Впрочемъ, что говорено о квадратахъ отъ § 124 даже до § 129, тожъ должно разумѣть и о кубахъ, и притомъ упомянуть должно, что когда не изъ совершеннаго куба извлекается корень, и требуется аккуратнѣйшей, то для всякаго класса приписывается по три нуля.

Примѣръ.

	9	541	000	000		21, 209
	8					
12)	1	541				
	1	2				
		6				
		1				
1323)		280	000			
		264	6			
		2	52			
			8			
		267	128			
13483200)		12	872	000	000	
		12	134	880	0	
			5	151	60	
					729	
		12	140	032	329	

Примѣ-

Примѣчаніе.

137) Чтобы узнать, справедливо ли извлеченіе квадрата или куба здѣлано, надлежитъ въ перьвомъ случаѣ взять квадратъ найденнаго корня, и къ нему придать остатокъ произшедшей отъ извлеченія. Ежели такимъ образомъ найденное число равно будетъ данному, то извлеченіе здѣлано будетъ вѣрно. Въ другомъ случаѣ должно взять найденнаго корня кубъ, и къ нему придать оставшееся послѣ извлеченія число. Ежели найденное число будетъ равно данному, то извлеченіе здѣлано будетъ вѣрно. А когда послѣ извлеченій никакого остатку не имѣется, то въ перьвомъ случаѣ квадратъ корня, а въ другомъ кубъ долженъ быть равенъ данному числу.

ТЕОРЕМА 7.

138) *Ежели какого нибудь цѣлаго числа не имѣется совершеннаго корня въ цѣлыхъ числахъ, то не можетъ быть и въ дробяхъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ дробь совершенной корень какого нибудь числа, то отъ умноженія сей дроби на себя должно произойти

изойпи данное цѣлое число. Но сколько дробь саму на себя ни умножишь, произведенie всегда будетъ дробь, а не цѣлое число. Слѣдовательно, когда данное число есть цѣлое, то совершенной онаго числа̀ корень дробь быть не можетъ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

О УПОТРЕБЛЕНИИ ПРОПОРЦІЙ ВЪ ОБЩЕМЪ ЖИТИИ.

ЗАДАЧА 16.

139) *Между двумя данными числами* A *и* B *найти среднее пропорцiональное* P.

РѢШЕНIЕ.

По § 81 должно быть AB=PP, и такъ ежели съ обѣихъ сторонъ извлечешь корень квадратной, то найдется P $=\sqrt{AB}$. Изъ сего видно, что дѣлать надлежитъ, когда должно найти среднее пропорцiональное число. Пусть будетъ

детъ A=8, а B=72, будетъ AB=PP =576 и P=$\sqrt{}$AB=24.

Примѣчанiе.

140) Среднее пропорцiональное число совершенное тогда только имѣть можно, когда произведенiе крайнихъ будетъ совершенной квадратъ, какъ въ примѣрѣ случилось. равнымъ образомъ между 2 и 8 среднее пропорцiональное будетъ 4. Когда произведенiе не будетъ квадратъ, въ такомъ случаѣ, чтобъ имѣть хотя нѣсколько аккуратное среднее пропорцiональное число, должно поступать по § 128. Напримѣръ ежели бы надлежало найти среднее пропорцiональное между 2 и 10, оное помощiю десятичныхъ дробей изображено будетъ слѣдующимъ образомъ 4,47224.

ЗАДАЧА 17.

141) *Даннымъ тремъ количествамъ найти четвертое пропорцiональное, или даннымъ двумъ найти третiе.*

РѢШЕНIЕ.

Когда четыре количества числами изображенныя составляютъ между собою пропорцiю, то произведенiе среднихъ

 нихъ

нихъ должно быть равно произведенїю крайнихъ (§ 80) и для того, ежели данныя количества изображены будутъ числами A, B и C, а искомое X, то должно быть $A:B = C:X$, и $A \times X = B \times C$; раздѣливши съ обѣихъ сторонъ на A будетъ $X = \frac{B \times C}{A}$, то есть произведенїе втораго и третьяго данныхъ чиселъ должно раздѣлить на первое: Пусть будетъ $A = 5$: $B = 15$, $C = 11$, четвертое пропорцїональное будетъ $X = \frac{B \times C}{A} = 33$. Ежели будетъ $B = C = 15$, то найдется $X = \frac{BB}{A} = 45$.

Слѣдствїе.

142) Ежели будетъ

$$m:n = A:B$$
$$p:q = B:C$$
$$r:s = C:D$$
$$t:u = D:E$$

то будетъ $B = \frac{nA}{m}$, $C = \frac{qB}{p} = \frac{nqA}{mp}$, $D = \frac{sC}{r} = \frac{nqsA}{mpr}$, $E = \frac{uD}{t} = \frac{nqsu}{mprt}A$ или $\frac{mprt}{nqsu} = \frac{A}{E}$, то есть $mprt : nqsu = A : E$. Симъ изъясняется то, что говорено было выше сего въ § 89, 90, 91. Откуду явствуетъ, что ежели дано будетъ нѣсколько содержанїй подобнаго свойства, и предъидущей терминъ A сложен-

наго содержанія, то послѣдующей E найдется посылкою.

mprt : nqsu = A : E

какъ произведеніе всѣхъ предъидущихъ къ произведенію всѣхъ послѣдующихъ данныхъ содержаній, такъ предъидущей содержанія сложеннаго къ своему послѣдующему E.

Примѣчанія.

143) Способъ изъ данныхъ трехъ чиселъ находить четвертое пропорціональное, называется *правило тройное* [Regula trium] которое для великаго въ общемъ житіи употребленія называется и *золотое* [aurea]. Понеже всѣ количества изображаются числами, то когда количества будутъ пропорціональны, непремѣнно и числа пропорціональны быть должны. По сему, ежели извѣстно, что содержаніе искомаго количества къ другому данному, есть тожъ, какое между данными двумя числами, то можно найти число, которымъ изображено будетъ искомое количество по § 141. Но содержаніе разныхъ количествъ должно заимствовать изъ другихъ наукъ, въ Ариѳметикѣ оныхъ показать не можно. Напримѣръ ежели бы дано было что изъ сосуда какого нибудь, когда онъ еще полонъ, въ двѣ минуты вытекаетъ

воды пять кружекъ, и найти бы должно было, во сколько времени вытечетъ 250 кружекъ. Въ семъ случаѣ даны три числа, которымъ должно найти четвертое пропорціональное. Но понеже извѣстно, что вода съ самаго начала скорѣе течетъ, нежели на исходѣ, слѣдовательно количество вытекающей воды не пропорціонально времени. И для того прежде, нежели изъ Гидростатики извѣстно будетъ, какимъ образомъ вода вытекаетъ, сего вопросу рѣшить не можно.

144) Множество находится и другихъ подобныхъ сему вопросовъ. Не смотря на сіе, многихъ количествъ случающихся въ общемъ житіи, содержанія всякому почти извѣстны. Содержаніе денегъ, вѣсовъ, мѣръ и проч. Ежели бы дано было какое нибудь количество P числомъ изображенное, которое бы къ извѣстной единицѣ A относилось, и тожъ бы количество надлежало изобразить числомъ, которое бы къ другой единицѣ B относилось, а содержаніе единицъ A и B извѣстно бы было, т. е. извѣстно бы было, что m единицъ какова есть A составляютъ количество Q, и тожъ количество Q составляютъ n единицъ, какова есть B, въ такомъ случаѣ по § 141 искомое легко найти можно будетъ, потому что какъ m содержится къ числу единицъ A въ количествѣ данномъ содержащихся, такъ n будетъ содержаться къ искомому числу единицъ

ницъ B. Такъ напримѣръ, пусть дано бы было 25 червонныхъ, и спрашивалося бы, сколько въ нихъ будетъ рублей. Понеже извѣстно, что 4 червонныхъ составляютъ ~~6~~ 9 рублей то по тройному пра́вилу должно будетъ посылать.

Какъ 4 къ 25, такъ 9 къ числу рублей искомому, и найдется, что въ 25 червонныхъ будетъ $56\frac{1}{4}$ рублей.

145) Понеже равныхъ дробей, какъ $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$ $\frac{C}{D}$ числитель одной A содержится къ своему знаменателю B, такъ числитель другой дроби C къ своему знаменателю D: то ежели данной какой нибудь дроби надлежитъ сыскать равную другую, которой знаменатель дается, то числитель найдется слѣдующимъ образомъ: Какъ знаменатель дроби данной къ своему числителю, такъ знаменатель другой дроби къ искомому числителю. Такъ напримѣръ, ежели бы предана была дробь $\frac{3}{5}$, и надлежало бы ее превратить въ другую, у которой знаменатель былъ бы 9, то числитель такой дроби будетъ $= \frac{3 \times 9}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$, и искомая дробь будетъ $\frac{5\frac{2}{5}}{9}$. Ежели бы напримѣръ $\frac{3}{5}$ означало части червонца, котораго девятая часть дѣлаетъ четверть рубля, то найденная дробь

$5\frac{2}{5}$

$\frac{5\frac{2}{5}}{9}$ означала бы $5\frac{2}{5}$ полуполтинниковъ. Подобнымъ образомъ количество, числами изъ разнаго роду единицъ состоящими, изображенное, можно будетъ изобразить числами, которыхъ единицы будутъ одинаки. Сумма какая нибудь денегъ состоящая изъ червонцовъ, рублей, гривенъ, копѣекъ, можетъ изображена быть суммою изъ одникъ копѣекъ состоящею, и сумма изъ копѣекъ состоящая можетъ раздроблена быть на гривны, рубли и червонцы. Тожъ должно разумѣть о мѣрахъ и о вѣсахъ.

146) Отсюду можно видѣть, коимъ образомъ, когда числа различнаго наименованія сложены, или одно изъ другаго вычтено, числа меньшаго наименованія обращать должно въ числа большаго наименованія, ежели содержаніе единицъ, къ которымъ относятся, извѣстно. Пусть будетъ дано сложить:

3 пуд:	12 фунт:	35 лот:	$7\frac{1}{2}$ золот:
2	39	101	$12\frac{3}{4}$
1	75	95	$13\frac{5}{6}$
6	126	231	$34\frac{1}{12}$
9	13	18	$1\frac{1}{12}$.

Числа во всякомъ столбцѣ находящіяся складывай такъ, какъ показано выше сего; начиная

начиная отъ чиселъ самаго меньшаго наименованія, и произойдетъ во перьвыхъ $34\frac{1}{12}$. Изъ найденной суммы выключить должно, сколько можно, единицъ слѣдующаго наименованія. А понеже 3 зол: составляютъ одинъ лотъ, то въ 34 зол: будетъ 11 лотовъ, кои должно приложить къ лотамъ, и останется только, $1\frac{1}{12}$ зол: Потомъ складывай числа слѣдующаго большаго наименованія, и произойдетъ 231, а съ произшедшими отъ золотниковъ лотами будетъ 242 лота, которые, понеже 32 лот: дѣлаютъ одинъ фунтъ, дадутъ 7 фунт: а въ остаткѣ будетъ 18 лот: которые подпиши подъ лотами; а 7 фунтовъ приложи къ фунтамъ. Сумма всѣхъ фунтовъ будетъ 126, а съ произшедшими отъ лотовъ фунтами 133. Но понеже 40 фунт: составляютъ одинъ пудъ, то 133 фунт: здѣлаютъ 3 пуда и 13 фунтовъ, которые должно подписать подъ фунтами. Наконецъ ежели сложить пуды произойдетъ 6, и придашь 3 пуда, отъ фунтовъ произшедшие, найдется 9 пудъ, и искомая сумма будетъ 9 пуд: 13 фунт: 18 лот: $1\frac{1}{12}$ зол.

147) Когда извѣстно, какъ числа меньшаго наименованія обращать должно въ числа большаго знаменованія, то какъ при вычитаніи поступать надлежитъ всякъ разсудить можетъ. Одно только то упомянуть должно, что когда случится вычитаемое

емое число больше верьхняго, тогда отъ числа въ слѣдующемъ столбцѣ находящагося занимается столько единицъ, чтобъ вычитанïе здѣлать можно было. Напримѣръ:

	изъ 13 фунт:	24 лот:	$29\frac{5}{8}$ зол:
должно вычесть	9	38	$8\frac{3}{4}$
	3.	18	$20\frac{7}{8}$
	3.	24	$2\frac{7}{8}$

то есть ежели золотники изъ золотниковъ обыкновеннымъ образомъ вычтешь, произойдетъ $20\frac{7}{8}$ зол: Потомъ надлежалобы 38 лот: вычесть изъ 24, но понеже сего учинить не возможно, займи отъ пудовъ одинъ пудъ, которой составитъ 32 лота, а ежели одного не довольно будетъ, то два или три и болѣе; и найдется 18 лотовъ. Наконецъ 9 фунт: должно будетъ вычитать уже изъ 12 фунт: и произойдетъ 3 фунта, но понеже 3 зол: составляютъ 1 лотъ, то 20 зол: здѣлаютъ 6 лот: и 2 зол. и такъ остатокъ будетъ 3 фунт: 24 лот: и $2\frac{7}{8}$ зол:

148) Наблюдая вышереченное, употреблять можно будетъ правило тройное при покупкахъ и продажахъ, и симъ подобныхъ случаяхъ. Ежели дана будетъ цѣна и количество товару какого нибудь, то по тройному правилу найти можно цѣну такожъ товару, какое бы количество онаго ни было. На примѣръ ежели бы пять аршинъ сукна продавались

давались по 14 руб: спрашивается, сколько должно бы было заплатить за 17 аршинъ тогожъ сукна? Понеже цѣна 5ти аршинъ содержится къ цѣнѣ 17ти аршинъ, такъ какъ 14 рубл: къ числу рублей, которое должно заплатить за 17 аршинъ, которое пусть будетъ $=Q$, т. е.

$$5 : 17 = 14 : Q,\ \text{слѣдовательно}$$
$$Q = \frac{17 \times 14}{5} = 47\tfrac{3}{5}\ \text{рубл:}$$

Теперь ежели бы кто хотѣлъ вѣдать, сколько $\frac{3}{5}$ частей рубля составятъ копеекъ; то понеже рубль состоитъ изъ ста копеекъ, сію дробь по § 145 должно превратить въ такую, въ которой бы знаменатель былъ 100, и для того должно поступать слѣдующимъ образомъ:

$$5 : 3 = 100 : q,\ \text{и будетъ}\ q = \tfrac{300}{5} = 60\ \text{коп:}$$

149) Подобнымъ образомъ рѣшатся вопросы, ежели дана будетъ цѣна и количество товару какого нибудь, сколько такогожъ товару на извѣстное число денегъ имѣть можно. На примѣръ за 16 рубл: можно имѣть 6 аршинъ съ половиною извѣстнаго сукна; спрашивается, сколько аршинъ за 40 рубл: тогожъ сукна имѣть можно? Пусть будетъ искомое число аршинъ $=Q$, то будетъ.

16:

$$16 : 40 = 6\tfrac{1}{2} : Q$$ слѣдовательно

$$Q = \frac{40 \times 6\tfrac{1}{2}}{16} = 16\tfrac{1}{4}$$

150) Ариѳметики раздѣляютъ правило тройное на *прямое* [Directa] и *превращенное* или *позвратное* [Inversa]. Правило тройное прямое называется, когда произведенiе втораго и третьяго термина дѣлится на перьвой, и находится искомое число. А правило тройное возвратное, когда произведенiе перьваго на третей дѣлится на второй. Теперь спрашивается, гдѣ должно употреблять правило тройное прямое, и гдѣ тройное возвратное? Правило тройное возвратное въ тѣхъ случаяхъ употреблять надлежитъ, въ которыхъ требуется, чтобъ въ сколько разъ перьвой терминъ больше втораго, въ столькобъ разъ третей былъ меньше четвертаго: или чтобъ въ столько разъ третей былъ больше четвертаго, въ сколько разъ перьвой меньше втораго. На примѣръ 5 человѣкъ нѣкоторую сумму денегъ издерживаютъ въ 8 дней; спрашивается, въ сколько дней издержатъ тужъ сумму 12 человѣкъ. Изъ сего вопросу видно, что сколько разъ перьвой терминъ (5) меньше втораго (12), столько разъ третей (8) долженъ быть больше четвертаго искомаго, потому что чѣмъ меньше людей, тѣмъ больше требуется времени на

издержанiе

издержанїе той же суммы денегъ, и найдется искомое число $= 3\frac{1}{3}$. Изъ сего можно разумѣть, когда должно употреблять правило тройное прямое. Короче сказать, во всѣхъ задачахъ должно употреблять правило тройное возвратное, когда при задачѣ сей вопросъ можно употребить: *Чѣмъ больше, тѣмъ меньше*, или *чѣмъ меньше, тѣмъ больше*. Напротивъ того правило тройное прямое, гдѣ можно спросить: *Чѣмъ больше, тѣмъ больше*, или *чѣмъ меньше, тѣмъ меньше*.

Примѣръ.

Ежели бы кто 60 верстъ переходилъ въ 26 часовъ, спрашивается, во сколько времени тотъ же человѣкъ перейдетъ 265 верстъ? Понеже чѣмъ больше разстоянїе, тѣмъ больше требуется времени, чтобъ оное прейти и обратно; то изъ сего видно, что при рѣшенїи сего вопроса должно употребить правило тройное прямое, и найдется искомое число часовъ $= \frac{265 \times 16}{60} = 70\frac{2}{3}$.

2 примѣръ) Нѣкоторое строенїе 1000 работниковъ могутъ построить въ 12 дней, спрашивается, въ сколько дней могутъ построить тожъ строенїе 325 работниковъ? Понеже чѣмъ больше работниковъ, тѣмъ меньше требуется времени къ постройкѣ

строенія ; слѣдовательно въ семъ случаѣ должно будетъ употребить правило тройное возвратное , и будетъ число дней , въ которое 325 работниковъ совершить могутъ такоежъ строеніе $= \frac{12 \times 1000}{325} = 36\frac{12}{13}$ дней. Такимъ образомъ всѣ задачи , касающіяся до сего правила , разпознавать и рѣшить можно.

151) Когда въ задачѣ данныхъ терминовъ будетъ пять , тогда способъ рѣшенія такой задачи называется правило *пятерное* [de quinque] : когда будетъ семь данныхъ терминовъ , то называется *семерное* [de septem]. Вообще , сколько бы терминовъ ни было , называется правило *тройное сложное* , потому что задачи , касающіяся до правила пятернаго рѣшатся по двумъ тройнымъ , касающіяся до семернаго , по тремъ тройнымъ. Сіи правила называются *прямыми* , когда въ нихъ ни одного правила тройнаго превращеннаго употреблять не надобно : въ противномъ случаѣ *обратными*. Ежели бы данъ былъ слѣдующей вопросъ 330 рублей въ 15 мѣсяцовъ приносятъ росту 24 рубли , спрашивается , сколько принесутъ 500 рублей въ 35 мѣсяцовъ? Пусть будетъ искомой ростъ $= Q$, и ростъ , которой 500 рублей приносятъ въ 15 мѣсяцовъ $= q$. Понеже чѣмъ больше сумма будетъ , тѣмъ больше росту будетъ отъ той же суммы денегъ ; то

то изъ сего видно, что сей вопросъ надлежитъ до правила пятернаго прямаго.

$$330 : 500 = 24 : q = \frac{24 \times 500}{330} = 36\frac{4}{11}.$$

$$15 : 35 = q : Q = \frac{q \times 35}{15} = 84\frac{28}{33}.$$

Изъ сего также видно, что содержанїе росту даннаго къ искомому Q сложено изъ содержанїй данныхъ суммъ и времени, и будетъ

$$330 \times 15 : 500 \times 35 = 24 : Q = \frac{24 \times 35 \times 500}{330 \times 15} = 84\frac{28}{33}.$$

152) Надлежитъ примѣръ дать и правила пятернаго возвратнаго, каковъ есть слѣдующей. Десять человѣкъ 4 рубли издерживаютъ въ 3 дни, спрашивается, въ сколько дней 100 человѣкъ издержатъ 2000 рублей? Пусть будетъ время искомое $= T$, а время, въ которое 100 человѣкъ издержатъ 4 рубли $= t$. Понеже чѣмъ больше людей, тѣмъ меньше требуется времени на издержанїе той же суммы денегъ, то въ посылкѣ

$$10 : 100 = 3 : t, \text{ будетъ } t = \frac{30}{100}.$$

Когда найдено, во сколько времени 100 человѣкъ могутъ издержать 4 рубли; то по тройному правилу прямому найдется время, въ которое тожъ число людей издержатъ 2000 рублей. Понеже чѣмъ больше денегъ, тѣмъ больше требуется времени на

 издержа-

издержаніе; то изъ сего видно, что здѣсь должно употребить правило тройно прямое.

$$4 : 2000 = t : T = \frac{t \times 2000}{4} = 150.$$

или поставя термины первой пропорціи въ такой порядокъ, чтобъ можно было употребить правило тройное прямое

$$100 : 10 = 3 : t$$
$$4 : 2000 = t : T$$
$$4 \times 100 : 10 \times 2000 = 3 : T$$

будетъ $T = \frac{3 \times 10 \times 2000}{4 \times 100} = 150.$

153) Не можно здѣсь не упомянуть, что всѣ правила пятерныя обратныя могутъ рѣшены быть по двумъ тройнымъ прямымъ. Возмемъ въ примѣръ прежней вопросъ. Пусть будетъ число денегъ, которое 100 человѣкъ издерживаютъ въ три дни $= n$; то будетъ

$$10 : 100 = 4 : n = 40$$
$$n : 2000 = 3 : T = 150 \text{ или}$$
$$10n : 100 \times 2000 = 3 \times 4 : nT \text{ будетъ}$$
$$T = \frac{3 \times 4 \times 100 \times 2000}{10n} = 150.$$

154) Подобнымъ образомъ рѣшатся задачи, состоящія изъ семи и больше терминовъ. Напримѣръ 4 писаря переписываютъ въ 8 дней 250 страницъ, изъ которыхъ на всякой находится по 20 строкъ; спрашивается, во сколько дней 6 писарей 350 страницъ о 25 строкахъ напишутъ?

Изъ

Изъ самаго вопросу видно, что при рѣшенiи онаго должно разъ употребить правило тройное превращенное; однакожъ здѣсь поставлены термины въ такомъ порядкѣ, чтобъ можно было употребить правило тройное прямое.

$$6 : 4 = 8 : t$$
$$250 : 350 = t : u$$
$$20 : 25 = u : T\text{, и будетъ}$$
$$T = \frac{4 \times 350 \times 25 \times 8}{6 \times 250 \times 20} = 9\tfrac{1}{3}$$

t означаетъ время, въ которое 6 писарей перепишутъ 250 страницъ; u показываетъ время, въ которое тожъ число писарей перепишутъ 350 страницъ, а T время искомое.

155) Пусть данъ будетъ еще слѣдующей вопросъ: 3300 рублей въ 18 мѣсяцовъ приносятъ росту 180 рублей, а сумма 5000 дана на такой же ростъ на 30 мѣсяцовъ; но по прошествiи сего времени должникъ, когда заимодавцу ростъ платить станетъ по договору, вмѣсто 5 рублей давать долженъ только 4 рубли. Полученной такимъ образомъ ростъ должно раздѣлить между братомъ и сестрою такъ, чтобъ изъ трехъ частей брату досталось двѣ, а сестрѣ одна; спрашивается, сколько брату и сколько сестрѣ достанется?

$$3300 : 5000 = 180 : m$$
$$18 : 30 = m : n$$
$$5 : 4 = n : p$$
$$3 : 2 = p : q$$

здѣсь m значитъ ростъ 5000 рублей въ 18 мѣсяцовъ, n ростъ той же суммы въ 30 мѣсяцовъ, p означаетъ ростъ уменьшенной по договору, а q означаетъ часть, которую братъ изъ росту p получить долженъ, и будетъ.

$$3300 \times 18 \times 5 \times 3 : 5000 \times 30 \times 4 \times 2 = 180 : q \text{ и}$$
$$q = \frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3} = 242\tfrac{14}{33}.$$

156) Сюда принадлежитъ и правило *товарищества*, которое состоитъ въ томъ, чтобъ общей прибытокъ или убытокъ товарищей раздѣлить между ими пропорціонально положеннымъ въ торгъ отъ иихъ суммахъ. Понеже кто больше денегъ положилъ, тотъ больше и прибыли, въ разсужденіи другаго, имѣть долженъ, и тѣмъ большей терпѣть убытокъ, въ случаѣ проигрышу. И для того будетъ, какъ общая сумма къ общему прибытку или убытку, такъ сумма всякаго порознь къ своему прибытку или убытку. Пусть данъ будетъ слѣдующей вопросъ: Трое сложились торговать вмѣстѣ, первой изъ нихъ въ торгъ положилъ 1400 рубл: второй 1500 рубл: третей 1600 рублей. По прошествіи нѣкотораго времени при-

приторговали они 5000 рублей; спрашивается, сколько всякому изъ сей суммы имѣть должно? Для рѣшенія сего вопроса поступай какъ слѣдуетъ:

Сумма перьваго	1400
Втораго	1500
Третьяго	1600
Сумма всѣхъ	4500

Пусть будетъ барышъ, которой изъ приторгованной суммы перьвой получитъ долженъ $= P$, барышъ втораго $= Q$, барышъ третьяго $= R$.

$$4500 : 1400 = 5000 : P$$
$$4500 : 1500 = 5000 : Q$$
$$4500 : 1600 = 5000 : R$$

будетъ $P = 1555\frac{25}{45}$: $Q = 1666\frac{30}{45}$: $R = 1777\frac{35}{45}$.

Повѣреніе.

$1555\frac{25}{45}$
$1666\frac{30}{45}$
$1777\frac{35}{45}$

5000 общая прибыль.

157) Ежели при суммѣ всякаго дано будетъ еще время, на которое сумма въ торгъ положена, какъ напримѣръ: трое барыша получили 9000 рублей, перьвой въ торгъ положилъ 1000 рублей на 16 мѣсяцовъ, второй 1400 на 10 мѣсяцовъ, третей 3000 на 7 мѣсяцовъ; спрашивается, сколько всякому изъ общаго барыша получить должно?

что для рѣшенія сего вопроса надлежитъ всякаго сумму умножить временемъ, на которое положена въ торгъ, и произведенія сложить въ одну сумму, и поступать какъ слѣдуетъ:

	16000		: P барышъ перьваго
51000 :	14000	= 9000	: Q втораго
	21000		: R третьяго

и найдется $P = 2823\frac{27}{51}$, $Q = 2470\frac{30}{51}$, $R = 3705\frac{45}{51}$.

Повѣреніе дѣлается такимъ же образомъ, какъ прежде.

158) Древніе писатели Ариѳметики имѣютъ еще правило *смѣшенія*, о которомъ и я предложить здѣсь намѣренъ. Сіе правило показываетъ, какъ данныя вещи разныхъ цѣнъ между собою смѣшивать, чтобъ смѣшенное имѣло данную цѣну. Напримѣръ, пусть дано будетъ два сорта серебра A и B, изъ которыхъ одного A фунтъ стоитъ 10 рублей, а другаго B фунтъ 16 рублей; спрашивается, сколько должно взять изъ A и B, чтобъ смѣшеннаго C было 5 фунтовъ, изъ которыхъ всякой стоилъ бы 12 рублей? Здѣсь данныя цѣны суть 10 и 16, а средняя по произволенію взятая 12, которая ни больше ни меньше не можетъ быть обѣихъ данныхъ. Можетъ въ задачѣ случиться и большее число вещей къ смѣшенію данныхъ, но сперва положимъ, что

только

только двѣ дано, въ такомъ случаѣ рѣшатся подобныя задачи слѣдующимъ образомъ. Надлежитъ цѣны подписать одну подъ другою, а среднюю по произволенїю взятую по срединѣ ихъ отъ лѣвой рукй, потóмъ надлежитъ данные цѣны съ среднею сравнивать, и сыскать между ими разности. Найденную разность между среднею цѣною и большею данныхъ напиши противъ меньшей цѣны, а разность между данною меньшею и среднею цѣною противъ данной большей. Когда сїе здѣлано будетъ, надлежитъ столько разъ дѣлать прáвило тройное, сколько дáно будетъ вещей или цѣнъ, въ которомъ перьвой терминъ долженъ быть сумма разностей, второй количество смѣшеннаго, третей каждая разность. Найденныя количества покажутъ, сколько изъ всякаго сорту взять надлежитъ.

A 10 (B—C) 4

C 12

B 16 (C—A) 2

Сумма разностей будетъ $= 6 =$ B — A

$6 : 5 = 4 : 3\frac{1}{3}$ ф: столько должно взять сер: A
$2 : 1\frac{2}{3}$ ф: и столько серебра B.

Смѣщеннаго каждой фунтъ будетъ стóить 12 рублей.

159) Когда дано будетъ больше вещей къ смѣшенїю, нежели двѣ, тогда по

двѣ всѣ цѣны надлежитъ сравнивать, какъ выше показано, наблюдая 1) чтобъ цѣны, которые сравниваются, не были всѣ ни больше, ни меньше средней. 2) Чтобъ разность между большею сравняемыхъ и среднею цѣною написана была противъ меньшей, а разность между меньшею и среднею противъ большей. Впрочемъ порядокъ, какъ цѣны сравниваются, разности не дѣлаетъ, и можетъ одна и тажъ цѣна съ другими сравняема быть не однократно. Отъ чего бываетъ, что задача можетъ разными образами разрѣшена быть. Когда всѣхъ цѣнъ сравненія будутъ зделаны, то столько разъ правило тройное дѣлать должно, сколько данныхъ цѣнъ имѣется. Въ тройныхъ правилахъ первой терминъ долженъ быть сумма всѣхъ разностей, второй количество смѣшеннаго, третей всякая разность порознь, или сумма разностей, ежели противъ одной цѣны будетъ больше, нежели одна разность написана. Напримѣръ, пусть дано смѣшать четыре сорта вина A, B, C, D, изъ которыхъ перьваго A извѣстная мѣра продается по 30 коп: втораго B, такаяжъ мѣра по 50 коп: третьяго мѣра C по 70 коп: четвертаго D по 85 коп: спрашивается, сколько изъ всякаго взять надлежитъ, чтобъ такаяжъ мѣра смѣшеннаго E стояла 60 коп:

	A	30	(AC) 10
	B	50	(BD) 25
E 60	C	70	(AC) 30
	D	85	(BD) 10
			сумма 75

$$75:1 = \begin{cases} 10 : \frac{2}{15} \text{ столько вина A взять должно} \\ 25 : \frac{1}{3} \text{ столько B} \\ 30 : \frac{2}{5} \text{ столько C} \\ 10 : \frac{2}{15} \text{ столько D.} \end{cases}$$

160) Хотя задача такимъ образомъ и рѣшена; однакожъ можетъ рѣшиться и слѣдующимъ образомъ, ежели другія сравненія въ разсужденіе примутся.

	(A) 30	(AC) 10	(AD) 25
	(B) 50	(BD) 25	(BC) 10
(C) 60	(C) 70	(AC) 30	(BC) 10
	(D) 85	(BD) 10	(AD) 30

И такъ сумма всѣхъ разностей будетъ = 150

$$150:1 = \begin{cases} 35 : \frac{35}{750} = \frac{7}{30} \text{ столько вина A взять дол:} \\ 35 : \frac{35}{150} = \frac{7}{30} \text{ столько B.} \\ 40 : \frac{40}{150} = \frac{4}{15} \text{ столько C.} \\ 40 : \frac{40}{150} = \frac{4}{15} \text{ столько D.} \end{cases}$$

161) Доказательство сего правила и причину, для чего не одно рѣшеніе быть можетъ, когда дано бываетъ больше, нежели двѣ вещи къ смѣшенію, заимствовать должно отъ Алгебры. Теперь еще осталось вкрат-

вкратцѣ предложить о правилѣ фальшивомъ, въ которомъ по изобрѣтенiи Алгебры почти никакой нужды не имѣемъ, но больше для того, чтобъ показать, съ какою трудностiю древнiе то находили, что нынѣ помощiю Алгебры въ мгновенiе ока находится.

162) *Прапило фальшипое* [Regula falsi] называется способъ, изъ ложныхъ положенiй находить искомое, и раздѣляется на правило одного положенiя и двухъ положенiй. Правило одного положенiя называется, когда помощiю одного по произволенiю взятаго числа находится искомое, о которомъ я здѣсь говорить не намѣренъ, потому что, ежели показано будетъ, въ чемъ состоитъ правило двойнаго положенiя, то первое само собою будетъ ясно. Притомъ всѣ вопросы, которые рѣшатся чрезъ перьвое правило, рѣшены быть могутъ и помощiю втораго, но не обратно. Способъ рѣшить задачи состоитъ въ слѣдующемъ: Вмѣсто искомаго числа возьми какое нибудь по произволенiю, которое называется *положенiе* [Hypothesis], и съ нимъ такъ поступай, какъ задача требуетъ. Ежели принятое по произволенiю число задачи не рѣшитъ, то погрѣшность подписать надлежитъ подъ своимъ положенiемъ. Потомъ возьми другое какое нибудь число, и съ нимъ дѣлай тожъ, что съ перьвымъ, или какъ задача велитъ. Ежели

и другое

и другое съ задачею не сходно будетъ, то погрѣшность подпиши подъ соотвѣтствующимъ положенїемъ. Погрѣшности въ избыткѣ означать надлежитъ знакомъ +, а погрѣшности въ недостаткѣ знакомъ —. Ежели погрѣшности будутъ одинаки, то разность ихъ, а ежели разные, то сумму ихъ взять за первой терминъ слѣдующаго тройнаго прáвила. Какъ разность или сумма погрѣшностей къ разности положенїй, такъ погрѣшность, которая нибудь къ четвертому пропорцїональному. Найденное четвертое пропорцїональное число къ тому положенїю, отъ котораго произошла погрѣшность на третьемъ мѣстѣ пропорцїи поставленная, придать надлежитъ, ежели погрѣшность была въ недостатокъ, вычесть ежели погрѣшность была въ избыткѣ. Для изъясненїя сего прáвила предлагаются слѣдующїе примѣры:

ПРИМѢРЪ.

163) Летѣло стадо гусей, а на встрѣчу имъ одинъ гусь, и говоритъ: здраствуйте сто гусей, на что одинъ изъ стада отвѣтствовалъ: ежели бы насъ было еще столько, сколько теперь имѣется, да полстолька, да четверть столька, да ты гусь съ нами, тогда бы насъ было сто гусей. Спрашивается, сколько гусей летѣло?

рѣшк-

РѢШЕНІЕ.

Пусть числомъ было гусей 4, которое число называется положеніе. Для краткости положенное должно быть малое число, напр: 1 или 2. Но иногда задача того требуетъ, чтобъ положеніе было какое нибудь число побольше, которое бы дѣлилось на извѣстныя числа для избѣжанія дробей. Въ семъ примѣрѣ положеніе должно быть такое, которое бы дѣлилось на 2 и на 4, и для того взято 4. По силѣ задачи 4+4+2+1+1 должны составить 100; но 4+4+2+1+1=12 меньше, нежели 100; слѣдовательно погрѣшность отъ сего положенія будетъ въ ~~избыткѣ~~ =−88.

Потомъ надлежитъ здѣлать другое положеніе; пусть число гусей было 12. По силѣ задачи 12+12+6+3+1 должны быть 100; но 12+12+6+3+1=34. И такъ погрѣшность и отъ втораго положенія будетъ въ недостаткѣ =−66. Слѣдовательно по § 162 должно будетъ дѣлать слѣдующее ~~второе~~ правило. Какъ разность погрѣшностей (~~12~~ 22) къ разно-

разности положеній (8), такъ погрѣшность которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$22 : 8 = \begin{cases} 88 : P \\ 66 : Q \end{cases}$$

и найдется $P = 32$; $Q = 24$. Понеже погрѣшности были въ недостаткѣ, найденныя числа надлежитъ придать къ соотвѣтствующимъ положеніямъ; и такъ въ стадѣ гусей было 36.

ДРУГОЕ РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что летѣло 8 гусей. По силѣ задачи $8 + 8 + 4 + 2 + 1$ должно быть 100; но $8 + 8 + 4 + 2 + 1 = 23$; слѣдовательно погрѣшность будетъ въ недостаткѣ $= -77$. Положимъ, что число гусей было $= 44$. По силѣ задачи $44 + 44 + 22 + 11 + 1$ должны состоять 100: но сумма $44 + 44 + 22 + 11 + 1 = 122$. Слѣдовательно погрѣшность будетъ въ избыткѣ $= +22$, и должно будетъ дѣлать слѣдующее тройное правило: какъ сумма погрѣшностей къ разности погрѣшностей, по такъ погрѣшность, которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$96 : 36 = \begin{cases} 77 : P \\ 22 : Q \end{cases}$$

и найдется P=28, что по § 162 должно придать къ своему положенію, чтобъ имѣть искомое число, которое будетъ =36, а Q=8, которое по § 159 должно вычесть изъ положенія 44, и найдется, какъ прежде, число гусей 36.

ПОВѢРЕНІЕ.

36+36+18+9+1=100. Изъ сего явствуетъ, что стадо гусей было 36.

164) рѣшенія, въ которомъ бы обѣ погрѣшности были въ избыткѣ, не прилагаю, потому что оно со всѣмъ сходно съ перьвымъ, найденныя только четвертыя пропорціональныя числа надлежитъ вычитать изъ положеній соотвѣтствующихъ.

ПРИМѢРЪ 2.

165) Двое имѣютъ неизвѣстное число денегъ, только извѣстно, что ежели перьвой изъ своихъ другому дастъ 9 рубл: то у обѣихъ будетъ поровну. А ежели второй дастъ перьвому

вому 9, то первой будетъ имѣть вдесятеро больше, нежели второй; спрашивается, сколько всякой имѣетъ порознь?

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что первой имѣетъ 100 рублей, изъ которыхъ ежели дастъ второму 9; то у него останется 91, и сумма втораго будетъ =91−9=82. Ежели второй изъ суммы своей 82 первому дастъ 9, то у самаго останется 73, а первой будетъ имѣть 109, что по силѣ задачи должно быть вдесятеро больше, нежели 73, то есть 73 на 10 умноженное должно быть =109. Но 730 превышаетъ 109 числомъ 621; слѣдовательно погрѣшность въ избыткѣ =+621. Положимъ теперь, что первой имѣетъ 101, и найдется погрѣшность также въ избыткѣ =+630. Слѣдовательно должно будетъ по § 162 дѣлать слѣдующее тройное правило. Какъ разность погрѣшностей къ разности положеній, такъ погрѣшность которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$9 : 1 = \begin{cases} 621 : P = 69 \\ 630 : Q = 70. \end{cases}$$

Слѣдовательно первой имѣлъ 31 рубль, а второй 13 рублей.

ПРИМѢРЪ 3.

166) Трое выиграли 400 рубл: второй выигралъ больше, нежели первой 12 рублей, а третей выигралъ 16 рублей больше, нежели второй, спрашивается, сколько всякой изъ нихъ выигралъ?

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что первой выигралъ только одинъ рубль, слѣдовательно выигрышъ втораго будетъ 13 рублей, третьяго 29, и такъ сумма будетъ всѣхъ выигрышей 43, а должно быть 400 рубл: слѣдовательно погрѣшность будетъ въ недостаткѣ =−357. Положимъ еще, что перьваго выигрышъ состоялъ въ 2 рубл: и такъ погрѣшность будетъ опять въ недостаткѣ =−354. Слѣдовательно по § 162 должно дѣлать слѣдующее тройное правило: какъ разность погрѣшностей къ

разности положеній, такъ погрѣшность которая нибудь къ четвертому пропорціональному.

$$3:1 = \begin{cases} 357 : P = 119 \\ 354 : Q = 118. \end{cases}$$

Слѣдовательно выигрышъ перьваго будетъ 120 рубл: втораго 132 рубл: третьяго 148 рублей.

167) Подобные задачи рѣшатся также и слѣдующимъ образомъ. Ежели погрѣшности будутъ одинаки, надлежитъ первое положеніе умножить погрѣшностью втораго; и второе положеніе погрѣшностью перьваго, разность произведеній раздѣлить на разность погрѣшностей, частное число будетъ самое искомое. А ежели погрѣшности будутъ не одинаки; то сумму произведеній надлежитъ раздѣлить на сумму погрѣшностей; частное число будетъ искомое.

примѣръ.

168) Трое имѣютъ неизвѣстное число денегъ; перьвой и второй имѣютъ 120 рубл: второй и третей 200 рубл: перьвой и третей 300 рубл: спрашивается, сколько всякой имѣетъ?

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что первой имѣетъ 10 рубл: второй будетъ 110, а третей 90 рубл: и понеже еще первой и третей имѣютъ 300 рубл: а по положенію сумма перваго и третьяго =100, слѣдовательно погрѣшность будетъ =—200. Положимъ, что первой имѣетъ 20 рубл: сумма втораго будетъ 100 рубл: третьяго также 100 рубл: но первой и третей имѣютъ 300 рубл: а по положенію только 120, слѣдовательно будетъ погрѣшность =—180.

Полож: Iвое IIрое

10	20
200	180
1800	4000.

Разность произведеній будетъ =2200; разность погрѣшностей =20. Слѣдовательно сумма перваго будетъ =110, втораго =10, третьяго =190 рублямъ.

169) Не токмо всѣ задачи, которыя по сему правилу рѣшены быть могутъ, но и тѣ, кото-

которыхъ по простой Ариѳметикѣ рѣшить не возможно, помощїю Алгебры несравненно способнѣе рѣшатся. И для того я здѣсь ни примѣровъ не умножаю, ни доказательствъ сихъ правилъ не прилагаю.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О ПРОГРЕССIЯХЪ И ЛОГАРИѲМАХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 25.

170) *Порядокъ* или *прогрессїя* [series или Progressio] есть продолженїе чиселъ, въ какомъ нибудь содержанїи находящихся. *Прогрессїя Ариѳметическая* [Arithmetica] называется, въ которой разность между двумя ближайшими терминами вездѣ тажъ *Порядокъ* или *прогрессїя Геометрическая* [Geometrica] называется, въ которой содержанїе каждаго термина къ своему послѣдующему вездѣ одинако.

Примѣчанїе.

171) По сему безчисленное множество имѣть можно порядковъ или прогрессїй какъ Ариѳметическихъ, такъ и Геометри-

 ческихъ.

ческихъ. Изъ опредѣленія видно, что числа натуральныя 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч: составляютъ прогрессію Ариѳметическую, въ которой всякой терминъ отъ своего предъидущаго разнится единицею. Ариѳметическую же прогрессію будутъ составлять и слѣдующія числа: 1, 3, 5, 7, 9, 11 и проч: или 1, 4, 7, 10, 13, 16, и проч: изъ которыхъ въ первой разность терминовъ есть 2, а въ другой 3. Геометрическія прогрессіи суть слѣдующія: 1, 2, 4, 8, 16, и проч: и 1, 3, 27 9, и проч:

Слѣдствіе 1.

172) Понеже въ прогрессіи Ариѳметической разность между каждыми ближайшими двумя терминами есть одинака; то изъ даннаго одного термина прогрессіи и разности можно произвесть безконечной порядокъ, вычитая или прибавляя данную разность. Такъ на примѣръ, пусть будетъ данъ терминъ 15, а разность 3. Чрезъ приложеніе разности произойдетъ слѣдующей порядокъ: 15, 18, 21, 24, 27, 30 и проч: а чрезъ вычитаніе данной разности изъ даннаго термина найдется слѣдующей порядокъ:

15, 12, 9, 6, 3, 0. — 3 — 6. — 9. и проч

или вообще, пусть будетъ данной терминъ M, разность между двумя ближайшими

ми прогрессіи терминами N; то произойдетъ слѣдующая прогрессія: $M-nN \ldots M-3N$, $M-2N$, $M-N$, M, $M+N$, $M+2N$, $M+3N \ldots$ $M+nM$ гдѣ за M и N можно взять дробь или ирраціональное какое нибудь число.

Слѣдствіе 2.

173) Изъ предидущей прогрессіи видно, что ежели M возмется за перьвой терминъ, то $M+N$ будетъ второй, $M+2N$ будетъ третей, $M+3N$ будетъ четвертой, и разность между перьвымъ и вторымъ будетъ N, между перьвымъ и третьимъ будетъ $2N$ вдвое больше, нежели общая, между перьвымъ и четвертымъ $3N$, втрое больше общей, и такъ далѣе. По сему изъ данныхъ двухъ терминовъ прогрессіи Ариѳметической съ числомъ терминовъ, которые между данными находиться должны, можно опредѣлить всю прегрессію. Пусть изъ прогрессіи A, B, C, D, E, F и проч: данъ будетъ терминъ A и другой F; разность, которую сыскать должно $=N$. Понеже F есть шестой прогрессіи терминъ; то будетъ $F-A=5N$, слѣдовательно $N=\frac{F-A}{5}$, которую, ежели придать къ A найдется B, потомъ C, потомъ D и прочіе, которые между A и F вмѣщены быть должны.

 Слѣд-

Слѣдствїе 3.

174) Слѣдовательно между данными двумя терминами прогрессїи Ариѳметической можно вмѣстить столько терминовъ, сколько заблаго разсудится, которые составятъ новую прогрессїю. Пусть будетъ прежняя прогрессїя A, B, C, D и проч: и надлежало бы между A и B одинъ терминъ, которой называется средней пропорцїональной Ариѳметической, пусть будетъ искомой терминъ $=X$, по § 173 должно быть $B-A=2(X-A)$ или $X=\frac{A+B}{2}$.

Слѣдствїе 4.

175) Понеже въ прогрессїи Геометрической содержанїе всякаго термина къ своему послѣдующему есть одинако; то изъ даннаго одного термина и содержанїя поогрессїи найдутся всѣ послѣдующїе термины. Пусть будетъ данной терминъ 15, содержанїе прогрессїи 3 : 4, второй терминъ будетъ $\frac{4\times15}{3}=20$; третей $\frac{4\times20}{3}=\frac{80}{3}$; четвертой $\frac{320}{9}$, и такъ далѣе. Подобнымъ образомъ найдутся термины назадъ отступая $\frac{45}{4}$, $\frac{135}{16}$ и проч: или вообще пусть будетъ данной терминъ P содержанїе прогрессїи m : n, то изъ сихъ данныхъ составить можно слѣдующую прогрессїю:

...

... $\frac{m^3P}{n^3}$, $\frac{mmP}{nn}$, $\frac{mP}{n}$, P, $\frac{nP}{m}$, $\frac{nnP}{m^2}$, $\frac{n^3P}{m^3}$, $\frac{n^3P}{m^3}$ .... и пр: въ которой въ мѣсто P, m и n можно взять по произволенїю какїя нибудь числа.

Слѣдствїе 5.

173) Изъ прогрессїи видно, что ежели P будетъ первой прогрессїи терминъ, $\frac{nP}{m}$ будетъ второй, $\frac{nnP}{mm}$ будетъ третей, $\frac{n^3P}{m^3}$ будетъ четвертой. Содержанїе перьваго къ второму будетъ m : n, перьваго къ третьему mm : nn удвоенное содержанїя простаго; перьваго къ четвертому будетъ $m^3 : n^3$, утроенное содержанїя m : n; слѣдовательно изъ данныхъ двухъ и числа терминовъ, между двумя находящихся, можно опредѣлить прогрессїю. Пусть изъ прогрессїи A, B, C, D, E даны будутъ термины первой A и четвертой D, то будетъ $A : D = m^3 : n^3$, и по сему $\sqrt[3]{A} : \sqrt[3]{D} = m : n$. Нашедши содержанїе двухъ терминовъ ближайшихъ, всѣ термины опредѣлить можно будетъ.

Слѣдствїе 6.

174) Слѣдовательно между даными двумя терминами прогрессїи Геометрической столько можно умѣстить терминовъ, сколько

 за благо

за благо разсудится. Когда между двумя терминами одинъ только вмѣстить должно, то сіе рѣшится по § 138. На примѣръ, ежелибы дана была прогрессія $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 16, и между всякими двумя терминами надлежалобы вмѣстить по одному, то произойдетъ слѣдующая прогрессія.

$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8,

Примѣчаніе.

178) Сего довольно о прогрессіяхъ для показанія свойства логариѳмовъ. Въ алгебрѣ о свойствахъ прогрессій говорено будетъ пространнѣе.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. 26.

179) Ежели подъ прогрессіею Геометрическою, которая начинается отъ единицы, подписана будетъ какая нибудь Ариѳметическая; такъ чтобъ единицѣ соотвѣтствовалъ 0; то числа въ низу подписанныя называются верьхнихъ *логариѳмы* [Logarithmi]. Напримѣръ пусть прогрессія

Геом:	1	2	4	8	16	32	64	128	и проч:
Ариѳм:	0	1	2	3	4	5	6	7	

то логариѳмъ единицы будетъ 0, логариѳмъ

гариѳмъ числа 4 будетъ 2, а логариѳмъ 32 будетъ 5.

Примѣчаніе.

180) Понеже обѣ прогрессіи могутъ приняты быть по произволенію, и разныя прогрессіи, разные тѣхъ же чиселъ дадутъ логариѳмы; слѣдовательно разныя таблицы логариѳмовъ сочинить можно, но во всѣхъ логариѳмъ единицы долженъ быть 0. Напр: ежели бы прогрессія Геометрическая была;

1 4 16 64 256 и проч:

а Ариѳм: 0 1 2 3 4

то бы тѣхъ же чиселъ, напримѣръ 4 и 16 отмѣнные отъ прежнихъ произошли логариѳмы. Таблицы логариѳмовъ, которые обыкновенно употребляются, основаны на двухъ слѣдующихъ прогрессіяхъ:

Геом:	1	10	100	1000	10000
Ариѳ:	0,0000000:	1,0000000:	2,0000000:	3,0000000:	4,0000000
или	0	1	2	3	4

По сему логариѳмъ 10 будетъ единица, или 1,000000; логариѳмъ 100 будетъ 2,000000; логариѳмъ 1000 будетъ 3,000000; слѣдовательно логариѳмъ столько содержитъ въ себѣ цѣлыхъ единицъ, сколько при числѣ, которое логариѳму со-

отвѣт-

отвѣтствуетъ, находится нулей, и логариѳмы чиселъ между числами прогрессіи Геометрической находящихся, изображены должны быть десятичными дробями: тѣхъ, которые содержатся между единицею и 10, будутъ логариѳмы меньше единицы, а которые содержатся между 10 и 100, должны быть меньше нежели 2, а больше, нежели единица, а тѣхъ, которые содержатся между 100 и 1000 логариѳмы должны быть меньше нежели 3, а больше нежели 2, или вообще, въ логариѳмѣ числа какого нибудь, число цѣлыхъ единицъ должно быть меньше единицею, нежели изъ сколько знаковъ данное число состоитъ. Число цѣлыхъ единицъ въ логариѳмѣ какомъ нибудь называется *характеристика*, которая извѣстна, ежели извѣстно будетъ, изъ сколько знаковъ число состоитъ. И обратно; ежели данъ будетъ какой нибудь лагариѳмъ, то по характеристикѣ видно будетъ, изъ сколько знаковъ число оному соотвѣтствующее состоять должно.

ПОЛОЖЕНІЕ.

181) *Логариѳмъ какого нибудь числа, напримѣръ* M *означается обыкновенно литерою* l, *и пишется слѣдующимъ образомъ*: lM.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 8.

182) *Ежели логариѳмъ единицы будетъ 0, какъ во всѣхъ системахъ логариѳмовъ быть должно; то логариѳмъ произведенія двухъ чиселъ будетъ равенъ суммѣ логариѳмовъ множимыхъ чиселъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже единица содержится къ одному изъ множимыхъ чиселъ такъ, какъ другое множимое къ произведенію, то соотвѣтствующіе числамъ логариѳмы должны быть въ прогрессіи Ариѳметической, то найдется четвертое Ариѳметическое пропорціональное число, что есть логариѳмъ соотвѣтствующей произведенію, ежели къ третьему придастся второй, и изъ суммы вычтется первой. Но логариѳмъ единицы есть $=0$; слѣдовательно логариѳмъ произведенія двухъ чиселъ равенъ суммѣ логариѳмовъ имъ соотвѣтствующихъ.

Слѣдствіе 1.

183) Ежели будутъ даны два числа M и N, и притомъ логариѳмы оныхъ, то логариѳмъ

риѳмъ произведенія $M \times N$ будетъ $= lM + lN$, и ежели будетъ $M = N$, то логариѳмъ квадрата MM будетъ $= 2lM$, логариѳмъ куба будетъ $= 3lN$, и обратно логариѳмъ корня квадратнаго какого нибудь числа N равенъ будетъ половинѣ логариѳма числа N, логариѳмъ корня кубичнаго будетъ равенъ третей части логариѳма тогожъ числа. По сему при извлеченіи корней логариѳмы съ пользою употреблять, можно. Вообще логариѳмъ числа $M^n = nlM$.

Слѣдствіе 2.

184) Ежели числа какого нибудь логариѳмъ имѣется въ цѣлыхъ числахъ; то тогожъ числа квадрата, куба и прочихъ степеней логариѳмы будутъ цѣлыя числа; слѣдовательно другихъ чиселъ логариѳмы цѣлые быть не могутъ, какъ степеней 10, то есть 100, 1000 и прочихъ.

ТЕОРЕМА 9.

185) *Логариѳмъ частнаго числа равенъ разности логариѳмовъ дѣлимаго числа и дѣлителя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже дѣлитель содержится къ дѣлимому числу такъ, какъ единица къ

частно-

частному; но логариѳмы имъ соотвѣтствующїе должны составлять прогрессїю Ариѳметическую, то найдется четвертое пропорцїональное Ариѳметическое, то есть логариѳмъ соотвѣтствующей частному числу, ежели ко второму термину придастся третей, и изъ суммы вычтется первой. Но логариѳмъ единицы есть =0; слѣдовательно логариѳмъ частнаго числа̀ будетъ равенъ разности логариѳмовъ дѣлимаго числа̀ и дѣлителя.

Слѣдствїе.

186) Ежели будетъ дѣлимое числа M, а дѣлитель N; то логариѳмъ частнаго числа̀ $\frac{M}{N}$ будетъ $=lM-lN$, и логариѳмъ дроби какой нибудь найдется, ежели изъ логариѳма числителя вычтется логариѳмъ знаменателя.

Задача 18.

187) *Числа какого нибудь найти логариѳмъ, и показать способъ, какъ находить логариѳмы для всѣхъ обыкновенныхъ чиселъ.*

рѢшенiе.

Надлежитъ, какъ уже выше говорено, взять по произволенiю двѣ прогрессiи, одну Геометрическою, а другую Ариѳметическую и послѣднюю подъ первою подписать. Прогрессiи, которые при сочиненiи таблицъ логариѳмовъ обыкновенно употребляются, суть слѣдующiя:

A) 1,000000; 10,000000; 100,000000; 1000,000000; 10000,000000:

B) 0,000000; 1,000000, 2,000000, 3,000000, 4,000000.

И такъ всѣхъ чиселъ, которыя въ прогрессiи A находятся, даны будутъ логариѳмы совершенные, а тѣхъ чиселъ, которыхъ въ прогрессiи A не находится, совершенныхъ логариѳмовъ имѣть не можно. Но чтобъ найти и другихъ чиселъ логариѳмы, хотя несовершенные, но столь аккуратные, чтобъ безъ погрѣшности употреблять можно было, надлежитъ въ прогрессiи Геометрической вмѣщать новые термины между терминами ближайшими къ данному, и всякому прогрессiи Геом: найденному термину искать въ Ариѳметической соотвѣтствующей логириѳмъ.

гариѳмъ. Пусть данобудетъ сыскать логариѳмъ числа̀ 5. Понеже 5 между 1 ю и 10 ю содержатся, надлежитъ между 1 ю и 10 ю сыскать среднее пропорціональное, и между ихъ логариѳмами соотвѣтствующей найденному пропорціональному числу логариѳмъ. Такимъ образомъ найдется среднее пропорціональное C=3, 162277, и lC=0, 500000. Понеже число 5 стоитъ между C и между B, надлежитъ вмѣщать между B и C какъ прежде терминъ D, которой будетъ =5, 623413, и соотвѣтствующей ему логариѳмъ lD=0, 750000. Подобныя дѣйствія должно продолжать до тѣхъ поръ, пока среднее пропорціональное число не будетъ то самое съ нѣсколько нулями, котораго логариѳмъ требуется. Какъ напримѣръ въ таблицѣ слѣдующей найдено 5, 000000 и его логариѳмъ =0, 698970о. Число нулей показываетъ, до какихъ частей логариѳмъ отъ истиннаго нерознится. Можно ежели дальней аккуратности не требуется, безъ погрѣшности ужѐ lV взять за логариѳмъ числа̀ 5.

A= 1, 000000	lA 0, 0000000
B=10, 000000	lB=1, 0000000

C = 3,162277	lC = 0,5000000	$C = \sqrt{AB}$
D = 5,623413	lD = 0,7500000	$D = \sqrt{BC}$
E = 4,216964	lE = 0,6250000	$E = \sqrt{CD}$
F = 4,869674	lF = 0,6875000	$F = \sqrt{DE}$
G = 5,232991	lG = 0,7187500	$G = \sqrt{EF}$
H = 5,048065	lH = 0,7031250	$H = \sqrt{FG}$
I = 4,958069	lI = 0,6953125	$I = \sqrt{GH}$
K = 5,002865	lK = 0,6992187	$K = \sqrt{HI}$
L = 4,980416	lL = 0,6972656	$L = \sqrt{IK}$
M = 4,991627	lM = 0,6982421	$M = \sqrt{KL}$
N = 4,997242	lN = 0,6987304	$N = \sqrt{KM}$
O = 5,000052	lO = 0,6989745	$O = \sqrt{KN}$
P = 4,998647	lP = 0,6988525	$P = \sqrt{NO}$
Q = 4,999350	lQ = 0,6986135	$Q = \sqrt{OP}$
R = 4,999701	lR = 0,6989440	$R = \sqrt{OQ}$
S = 4,999876	lS = 0,6989592	$S = \sqrt{QR}$
T = 4,999963	lT = 0,6989668	$T = \sqrt{OS}$
V = 5,000008	lV = 0,6989707	$V = \sqrt{OT}$
W = 4,999984	lW = 0,6989687	$W = \sqrt{TV}$
X = 4,999997	lX = 0,6989697	$X = \sqrt{WV}$
Y = 5,000003	lY = 0,6989702	$Y = \sqrt{YX}$
Z = 5,000000	lZ = 0,6989700	$Z = \sqrt{XY}$

Примѣчанїе.

188) Такимъ образомъ исканы логариѳмы чиселъ; однакожъ не всѣхъ чиселъ толь продолжительнымъ трудомъ логариѳмы нахожены. Ежели всѣхъ чиселъ отъ единицы даже до десяти логариѳмы будутъ извѣстны, то всѣхъ чиселъ, которыя изъ оныхъ чрезъ умноженїе, дѣленїе и извлеченїе корней произходятъ, логариѳмы легко найти можно. На примѣръ, ежели бы надлежало сыскать логариѳмъ числа 18, тобъ изъ данныхъ логариѳмовъ чиселъ 9 и 2, или поне же $l9 = 3l3$ изъ логариѳмовъ чиселъ 3 и 2 найденъ былъ $l18 = 3l3 + l2$. Есть и другїя сокращенїя, о которыхъ говорено будетъ въ своемъ мѣстѣ.

189) Понеже всякаго числа логариѳмъ состоитъ изъ цѣлаго числа и десятичной дроби, которая называется *Мантисса*, и цѣлое число показываетъ число знаковъ, то мантисса будетъ показывать, какїе оные знаки быть должны: и ежели по мантиссѣ найдено будетъ число, которое логариѳму соотвѣтствуетъ, характеристика покажетъ, сколько знаковъ въ найденномъ числѣ будетъ принадлежать къ цѣлымъ числамъ, и которые будутъ означать десятичныя дроби. Такъ ежели бы найденъ былъ логариѳмъ слѣдующей 2,7603471, матисса покажетъ, что число сему логариѳму соотвѣтствую-

 щее

щее будетъ 4759. Но характеристика означаетъ, что число должно состоять изъ трехъ только знаковъ; слѣдовательно соотвѣтствующее число сему логариѳму будетъ 575,9. Ежели бы характеристика была 0, то бы соотвѣтствующее число было 5,759. А ежели бы характеристика была —1, то бы число сему логариѳму соотвѣтствующее было 0,5759. Тажъ мантисса съ характеристикою —2 соотвѣтствовать будетъ числу 0,05759. Въ такихъ случаяхъ должно разумѣть, что знакъ — принадлежитъ только къ характеристикѣ, а не къ десятичной дроби, какъ будто бы написано было —2 +0,7603471.

190) Напротивъ того, когда дано будетъ число 7942, найдется логариѳмъ онаго 3,8999299; а ежели бы данное число было 794,2, то бы логариѳмъ онаго былъ 2,8999299. Равнымъ образомъ логариѳмъ числа 7,942 будетъ 0,8999299. Изъ сего видѣть можно, какъ находить логариѳмы чиселъ, при которыхъ десятичныя дроби находятся. Надлежитъ представить, будто бы всѣ знаки даннаго числа означали цѣлыя части, потомъ взявши изъ таблицъ соотвѣтствующей имъ логариѳмъ, характеристику надлежитъ перемѣнить какъ свойство логариѳмовъ требуетъ (§ 180). А ежели надобно будетъ сыскать логариѳмъ такого числа, которое состоитъ изъ цѣлаго числа и изъ дроби, то

данное

данное число должно обратить въ дробь больше единицы, сыскать логариѳмы числителя и знаменателя порознь, и последней вычесть изъ перьваго (§ 186) такъ напримѣръ $l3\frac{3}{4}$ будетъ $= l\frac{15}{4} = l15 - l4 = 0.5740313$.

191) Что говорено въ § 189, тогда только можетъ имѣть мѣсто, когда въ таблицахъ находится самая данная мантисса. И понеже обыкновенныя таблицы логариѳмовъ не простираются далѣе какъ до 10000, то предписанное въ § 190 правило, тогда только безъ погрѣшности употреблять можно, когда въ данномъ числѣ не болѣе будетъ какъ четыре знака. Какъ поступать должно въ другихъ случаяхъ, ниже сего слѣдуетъ.

ЗАДАЧА 19.

192) *Данному логариѳму, котораго въ таблицахъ не находится, найти соотвѣтствующее число.*

РѢШЕНІЕ.

1) Ежели характеристика даннаго логариѳма будетъ 0, или 1, или 2; то перемѣня характеристику на 3, а мантиссу оставя тужъ, надлежитъ въ таблицахъ сыскать число соотвѣтствующее сему логариѳму, или

 тому

тому, которой ближе подходитъ къ данному. Въ найденномъ числѣ столько отдѣлить должно знаковъ для десятичныхъ дробей, сколько къ характеристикѣ прибавлено будетъ единицъ. Пусть данной логариѳмъ будетъ 1,9446784 соотвѣтствующее число логариѳму, которой болѣе всѣхъ прочихъ сходенъ съ даннымъ, будетъ 88. Но сего числа̀ настоящей логариѳмъ есть 1,9444827, и для того характеристику перемѣня на 3, ищи соотвѣтствующее число логариѳму 3,9446784; слѣдовательно данному логариѳму соотвѣтствующее аккуратнѣйшее число будетъ 88,04.

II) Ежели характеристика даннаго логариѳма будетъ 2 или 3 то взявши изъ таблицъ логариѳмъ меньшей ближайшій данному, надлежитъ оной вычесть изъ большаго ближайшаго къ данному, и изъ самаго даннаго; потомъ дѣлать слѣдующее тройное правило, какъ первая разность къ 100, или къ 1000, или къ 10000, такъ вторая къ искомымъ десятымъ, сотеннымъ, тысячнымъ, десятитысячнымъ частямъ, найденныя части должно приписать къ

числу, которое соотвѣтствуетъ логариѳму меньшему, ближайшему къ данному. Такимъ образомъ найдено будетъ аккуратнѣе соотвѣтствующее число. Напримѣръ, пусть данной логариѳмъ будетъ 3,4567809, къ которому меньшей ближайшей будетъ 3,4566696, а соотвѣтствующее ему число 2862; слѣдовательно разность между ими будетъ 1113; большей ближайшей къ данному будетъ 3,4568213; и разность между имъ и 3,4566696 будетъ 1517, откуду

$$1517 : 100 = 1113 : Q = 73$$

Слѣдовательно данному логариѳму аккуратнѣйшее прежняго соотвѣтствовать будетъ число 2862,73. Ежели бы на второмъ мѣстѣ поставлено было 1000, то бы искомое число нашлось 2862,733.

Примѣчаніе.

193) Ежели логариѳмъ данъ будетъ больше, нежели какіе въ таблицахъ находятся, и ему должно найти соотвѣтствующее число, то надлежитъ сперьва сыскать соотвѣтствующее число смотря на мантиссу. Потомъ

томъ по характеристикѣ надлежитъ опредѣлить въ найденномъ числѣ мѣсто единицъ. Ежели бы напримѣръ данъ былъ слѣдующей логариѳмъ 6,7589982; сыщи напередъ число соотвѣтствующее сему логариѳму смотря на мантиссу, которое будетъ 5741. Но характеристика показываетъ, что число должно состоять изъ семи знаковъ, то когда аккуратности не требуется, вмѣсто искомаго числа можно взять 5741000. Въ противномъ случаѣ надлежитъ по § 192 мантиссѣ искать аккуратнѣйшее число, и по характеристикѣ означить мѣсто единицъ. Такимъ образомъ найдется сему логариѳму соотвѣтствующее число 5741413.

ЗАДАЧА 20.

194) *Данному числу, которое превосходитъ* 10000, *найти соотвѣтствующей логариѳмъ.*

РѢШЕНІЕ.

Сыщи въ таблицахъ логариѳмъ, которой соотвѣтствуетъ первымъ отъ лѣвой руки четыремъ знакамъ даннаго числа, и вычти оной изъ большаго ближайшаго, потомъ дѣлай тройное правило, въ которомъ первой терминъ долженъ быть единица со столько нулями,

лями, сколько остальныхъ знаковъ въ числѣ находится, второй протчіе даннаго числа̀ знаки, третей найденная разность. Найденное четвертое пропорціональное число придай къ мантиссѣ логариѳма изъ таблицъ взятаго, и характеристику перемѣни глядя по числу знаковъ, и произойдетъ искомой логариѳмъ. Пусть будетъ данное число 5423758: логариѳмъ числа 5423 будетъ 3.7342396, разность 801, и понеже въ данномъ числѣ остается еще три знака, то должно посылать.

$$1000 : 758 = 801 : Q = 607$$

Слѣдовательно логариѳмъ искомаго числа будетъ 6,7343003.

ЗАДАЧА 21.

195) *Даннымъ тремъ числамъ помощію логариѳмовъ найти четвертое пропорціональное.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ данныя числа A, B, C, а четвертое пропорціональное D; то будетъ $D = \frac{B \times C}{A}$, но $lD = lB + lC - lA$

 слѣдо-

слѣдовательно четвертаго пропорціональнаго числа логариѳмъ найдется, ежели къ логариѳму третьяго приданъ будетъ логариѳмъ втораго, и изъ суммы вычтется логариѳмъ перьваго, а потомъ по таблицамъ соотвѣтствующее ему искомое четвертое пропорціональное. Пусть будетъ A = 13, B = 204, C = 615.

$$lA = 1.1139433$$
$$lB = 2.3096302$$
$$lC = 2.7888751$$
$$lB + lC = 5,0985053$$
$$lB + lC - lA = 3.9845620 = lD,$$

которому надлежитъ въ таблицахъ сыскать соотвѣтствующее число, оное будетъ 9650, 7 = D. Пусть будетъ A = 1, 3 : B = 20, 4 : C = 0, 615.

$$lA = 0, 1139433$$
$$lB = 1, 3096302$$
$$lC = -1, 7888751$$
$$lBlC = 1, 0985053$$
$$lB + lC - lA = 0, 9845620 = lD,$$

которому соотвѣтствующее число будетъ 9, 6507 = D.

Примѣ-

Примѣчаніе.

196) Хотя употребленіе логариѳмовъ довольно видно будетъ изъ тригонометріи, однакожъ здѣсь присовокуплю примѣръ, изъ котораго бы видно было, что и въ общемъ житіи бываютъ случаи, гдѣ логариѳмы съ великою пользою употреблены быть могутъ. Ежели изъ банка состоящаго изъ 300000 рублей отдаваны будутъ деньги въ проценты, такъ чтобъ по прошествіи каждаго года, каждые сто рублей приносили росту 6 рублей, спрашивается, сколько будетъ въ банкѣ денегъ спустя десять лѣтъ. Для рѣшенія сей задачи пусть будетъ искомая сумма $=S$. Понеже 100 рублей росту въ годъ приносятъ 6 рублей, то 300000 рублей принесутъ $\frac{6\times300000}{100}$; и такъ по прошествіи одного году въ банкѣ будетъ $300000+\frac{6.300000}{100}=(1+\frac{6}{100})300000=(\frac{106}{100})300000$. По прошествіи двухъ лѣтъ въ банкѣ будетъ находиться $\frac{106}{100}\times300000+\frac{106\times6}{(100)^2}300000=(\frac{106}{100}+\frac{106\times6}{(100)^2})300000=(\frac{106}{100})^2 300000$. Подобнымъ образомъ найдется, что по прошествіи трехъ лѣтъ банковая сумма будетъ $(\frac{106}{100})^3 300000$; по прошествіи четырехъ лѣтъ будетъ $(\frac{106}{100})^4 300000$, и такъ далѣе: слѣдовательно по прошествіи десяти лѣтъ въ банкѣ будетъ $(\frac{106}{100})^{10}\times300000=S$. Но кто бы хотѣлъ дробь $\frac{106}{100}$ возвышать до десятой степени? и для того въ семъ

случаѣ

случаѣ съ пользою можно употребить логариѳмы, какъ слѣдуетъ. Возьми изображенія

$$\left(\tfrac{106}{100}\right)^{10} \times 300000 = S$$

логариѳмы, и будетъ $10\, l\tfrac{106}{100} + l\, 300\,000 = lS$

или $10\, l\,106 - 10\, l\,100 + l\,300\,000 = lS$

Изъ сего видно, что надлежитъ взять логариѳмы изъ таблицъ чиселъ 106, 100 и 300000. Оныя суть.

$$\begin{array}{rcl} l\,106 & = & 2,025305865 \\ l\,100 & = & 2,000000000 \\ \hline l106 - l\,100 & = & 0,025305865 \\ 10(l106 - l100) & = & 0,253058650 \\ l300000 & = & 5,47712125 \\ \hline lS & = & 5,73017990 \end{array}$$

Чтобъ узнать, сколь велика будетъ сумма въ банкѣ спустя десять лѣтъ, надлежитъ найденному логариѳму сыскать соотвѣтствующее число. Найденнаго логариѳма характеристика показываетъ, что число должно состоять изъ шести знаковъ; а мантисса означаетъ, что первые искомаго числа знаки будутъ 5372. Но понеже точной мантиссы найденнаго логариѳма въ таблицахъ не находится, то найдется аккуратнѣйшее соотвѣтствующее ей число 5372, 523. (§ 192) Но характеристика показываетъ, что искомое число должно состоять изъ шести знаковъ; слѣдовательно сумма банковая, по прошествіи десяти лѣтъ, будетъ 537253, 2 рублей.

197) Такимъ же образомъ можно найти, сколько въ банкѣ будетъ денегъ по прошествіи пятидесяти лѣтъ, потому что сумма послѣ пятидесяти лѣтъ должна быть $(\frac{106}{100})^{50} \times 300000 = S$. Возьми съ обѣихъ сторонъ логариѳмы, и будетъ.

$$50l106 - 50l100 + l300000 = lS$$
$$l\,106 = 2,0253058$$
$$l\,100 = 2,0000000$$
$$l106 - l\,100 = 0,0253059$$
$$50l106 - 50l\,100 = 1,2652950$$
$$l\,300,000 = 5,4771213$$
$$lS = 6,7424163.$$

Теперь найденному логариѳму надлежитъ сыскать соотвѣтствующее число, и изъ характеристики онаго видно, что искомое число должно состоять изъ семи знаковъ, а изъ мантиссы, что первые онаго знаки должны быть 5526. А чтобъ прочіе знаки сыскать, должно поступать по § 192, и найдется соотвѣтствующее сему логариѳму число 5526068, въ которомъ одинъ послѣдней знакъ сомнителенъ. Можетъ быть, что по прошествіи пятидесяти лѣтъ въ банкѣ будетъ 5526069 рублей.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРІИ.



ГЛАВА ПЕРЬВАЯ

О ЛИНЕЯХЪ, УГЛАХЪ, И БОКАХЪ ФИГУРЪ.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 1.

1.

Тѣло *Геометрическое* есть, что во всѣ стороны имѣетъ опредѣленное протяженiе. Протяженiе онаго опредѣляется поверьхностями, поверьхности линеями, а линеи точками.

Примѣчанiе.

2) Хотя всякое тѣло имѣетъ три размѣренiя, то есть въ вышину, ширину, и длину, и оныхъ никакимъ образомъ отъ тѣла отдѣлить не возможно; однакожъ способность и въ краткихъ предѣлахъ содержащейся разумъ требуетъ, чтобъ о всякомъ размѣренiи изслѣдовано было порознь. Изъ опредѣленiя тѣла Геометрическаго видно,

К что

что объономъ основательно разсуждать не можно, прежде нежели свойства точекъ, линей, и поверьхностей, или плоскостей извѣстны будутъ. И для того надлежитъ начáло здѣлать отъ точекъ, потóмъ приступить къ линеямъ, потóмъ къ поверьхностямъ, а напослѣдокъ къ тѣламъ Геометрическимъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 2.

3) *Точка* [Punctum] есть знакъ никакой величины, то есть, никакого протяженія не имѣющей.

Примѣчаніе.

4) Иные точкою называютъ, что никакихъ частей не имѣетъ: Но какимъ бы образомъ она ни опредѣлена была, только неотмѣнно вѣдать надлежитъ, что точка Математическая есть нѣчто въ мысли представляемое, а въ самой вещи оной не имѣется Строгость Геометрическая подала причину къ такому воображенію.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

5) *Линея* [Linea] есть длина не имѣющая ни толщины, ни ширины.

Примѣ-

Примѣчаніе.

6) Такое количество, которое бы ни толщины, ни ширины, но толькоб длину имѣло, можно вообразить слѣдующимъ образомъ. Когда точка, какую въ § 3 описали, будетъ двигаться отъ одного мѣста къ другому, то путь, которой опишетъ, будетъ имѣть одну только длину, и для того иные линею называютъ слѣдомъ, которой точка по себѣ оставляетъ. По сему концы линей должны быть точки.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 4.

7) *Прямая линея* [Linea recta] есть самая кратчайшая изъ всѣхъ, которыя отъ одной точки къ другой провесть можно. *Платонъ* прямою линеею называетъ ту, которой концы загораживаютъ средину; Изъ сего можно видѣть, что будетъ *линея кривая* [Linea Curva].

Примѣчаніе.

8) Линея линею не можетъ инако пересѣчь, какъ въ одной точкѣ, и между двумя точками не можетъ болѣе какъ одна прямая линея умѣститься. Изъ сего слѣ-

слѣдуетъ, что ежели двѣ линеи между двумя точками умѣщаются, и одна другую покрываетъ, то сіи линеи будутъ между собою равны.

Опредѣленіе 5.

9) *Поперьхность* [Superficies] вообще называется величина, длину и ширину только имѣющая. А *плоская поперьхность* или *плоскость* называется такая поверьхность, которая въ длину и ширину по прямымъ линеямъ простирается, такъ чтобъ между всякими данными двумя точками проведенная на плоскости прямая линея вся падала на поверьхность; Изъ сего можно видѣть, что будетъ *кривая*.

Примѣчаніе.

10) Плоскою поверхностью, подобно какъ прямую линею, можно назвать ту, которой края загораживаютъ средину, или плоская поверьхность есть самая кратчайшая между данными предѣлами. Происхожденіе такого количества, которое бы длину и ширину только имѣло, можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ: Когда прямая линея концомъ своимъ по другой прямой или кривой

кривой линѣ будетъ двигаться, то въ первомъ случаѣ произойдетъ прямая, а въ другомъ кривая поверьхность.

11) Когда требуется, чтобъ на бумагѣ, которая плоскую поверьхность представляетъ, провесть прямую линею, то сколько возможно стараться должно, чтобъ она сходствовала съ тою, какую здѣсь представляемъ.

12) Имѣя понятіе о точкахъ, линеяхъ и поверьхностяхъ, прежде всего разсуждать надлежитъ о проведенныхъ двухъ прямыхъ линеяхъ на данной плоскости. Пусть сверьхъ проведенной AB, на бумагѣ плоскость Fig. представляющей, проведется чрезъ P и дру- 1. гая прямая линея CD, которая ежели продолжится съ обѣихъ концовъ, то съ одной стороны или ближе подходить станетъ къ AB, или отъ нея отходить далѣе, или ни отходить, ни ближе подходить. Продолженная въ сторону F линея CD, ежели приближаться станетъ къ линѣ AB, то ее пересѣчетъ гдѣ нибудь; а ежели продолжится въ сторону G, и отчасу болѣе удаляться будетъ, то чѣмъ больше въ тужъ сторону продолжишь, тѣмъ больше будетъ отстоять отъ продолженной въ тужъ сторону линеи AB, такъ что напослѣдокъ разстояніе между ими будетъ безконечно. А ежели линеи, какъ LM

 и AB,

и AB, продолженные съ обѣихъ сторонъ ни ближе подходить, ни далѣе отходить одна отъ другой не будутъ, то всегда въ равномъ разстоянiи между собою будутъ находиться.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 6.

13) Наклоненiе двухъ прямыхъ линей, на плоскости какой нибудь проведенныхъ, и взаимно себя пересѣкающихъ, называется *уголъ прямолинейной* [angulus rectilineus].

Примѣчанiе.

14) Когда только двѣ линеи пересѣкаютъ себя въ точкѣ, то уголъ, которой составляютъ, означается одною литерою у
Fig. верьху угла написанною, какъ напримѣръ A.
2. А ежели много будетъ линей, въ одной точкѣ взаимно себя пересѣкающихъ, то уголъ означается тремя литерами, изъ которыхъ средняя означаетъ верьхъ угла. Такъ уголъ между линеями AC и CB содержащейся означенъ будетъ слѣдующимъ образомъ ABC, а уголъ содержащейся между линеями AD и AB будетъ DAC.

15) Величина угловъ не зависитъ отъ длины боковъ, но отъ наклоненiя, которое

торое дѣлаютъ линеи уголъ составляющiе. Слѣдовательно углы будутъ равны, которыхъ наклоненiя боковъ будутъ между собою равны, то есть, когда одинъ уголъ съ другимъ такъ сходствуетъ, что ежели положа одного верьхъ на верьхъ другаго, бока одного упадутъ на бока другаго, не смотря на неравенство боковъ, тогда углы будутъ равны между собою. А ежели положа верьхи угловъ одинъ на другой, и одинъ бокъ на бокъ другаго, другой бокъ упадетъ внѣ перьваго угла, какъ бокъ AE падаетъ внѣ угла CAB; то уголъ EAB будетъ больше, нежели уголъ CAB: а ежели другой AD упадетъ внутрь угла CAB, то уголъ DAB будетъ меньше угла CAB.

16) Изъ сего вопросъ, можно ли уголъ назвать количествомъ, рѣшить не трудно. Многiе утверждали, что углы къ количествамъ принадлежать не могутъ. Но понеже уголъ увеличиться и убавиться можетъ, въ углахъ можемъ раздѣлять части, и изъ двухъ данныхъ узнать, которой изъ нихъ больше; то безъ всякаго сомнѣнiя углы между количествами почитать должно, съ тою разностью, что они особливой родъ коичества составляютъ, и по сему отмѣнымъ образомъ ихъ мѣрять должно.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 7.

Fig. 3. 17) Ежели линея CD упадетъ на другую AB, такъ что *смѣжные углы* [ang, contigui] ADE и CDB будутъ равны между собою; то линея CD называется *перпендикулярная* [perpendicularis] къ линеѣ AB, а углы ADC и CDB называются *прямые* [recti].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 8.

Fig. 3 18) Ежели прямая линея ED на другую такъ упадетъ, что произшедшіе смѣжные углы ADE и EDB не будутъ между собою равны, линея ED называется *косая* [obliqua], а углы ADE и EDB *косые*. Уголъ, которой больше прямаго, какъ ADE, называется *тупой* [obtusus], а уголъ, которой меньше прямаго, какъ EDB, называется *острой* [acutus].

Слѣдствіе.

19) Понеже уголъ тупой ADE превышаетъ уголъ прямой угломъ CDE, и тѣмъ же угломъ CDE уголъ острой меньше угла прямаго, слѣдовательно, какъ бы линея ED

на

на линею AB ни упадала, сумма угловъ произшедшихъ равна будетъ двумъ прямымъ.

Примѣчанïе.

20) Ежели про линеи AD и DB такъ разсуждать, будто бы они между собою уголъ заключали, то сей уголъ будетъ равенъ двумъ прямымъ: Слѣдовательно всякïя двѣ прямыя линеи, одну составляющïя, дѣлаютъ уголъ равной двумъ прямымъ. Уголъ прямой при опредѣленïи величины прочихъ угловъ берется за мѣру, и для того ради краткости можно оной означать литерою R, уголъ равной двумъ прямымъ будетъ $= 2R$.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 9.

21) *Фигура* называется пространство со всѣхъ сторонъ предѣлами ограниченное. *Плоская фигура* будетъ плоскость въ извѣстныхъ предѣлахъ содержащаяся.

Примѣчанïе.

22) Предѣлы фигуръ могутъ быть прямыя линеи, кривыя и прямыя съ кривыми перемѣшенныя. Фигуры, которыя между тѣмижъ предѣлами умѣститься могутъ, и такъ между собою сходствуютъ, что ежели

ли одна положится на другую, то верьхняя нижнюю совершенно закроетъ, суть между собою равны. Но не всегда заключать должно, что фигуры, которыя взаимно себя не закрываютъ, суть не равны между собою; ибо случиться можетъ, что хотя фигуры взаимно себя не закрываютъ, однакожъ будутъ равны между собою.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 10.

23) *Кругъ* [Circulus] есть плоская фигура, окруженная одною такого свойства кривою линеею, что всякая оной точка равно отстоитъ отъ извѣстной точки, находящейся въ срединѣ фигуры. Такая точка въ фигурѣ есть C, и называется *Центръ* [Centrum] Кривая линея AMBD называется *Окружность* [Peripheria]. Разстояніе между какою нибудь точкою окружности, какъ M, и центромъ C называется *радїусъ* или *полуполерешникъ* [Radius]; а линея, которая проходя чрезъ центръ пересѣкаетъ окружность въ двухъ мѣстахъ называется *полерешникъ* [Diameter].

Fig. 4.

Примѣчаніе.

24) Происхожденіе круга Геометры представляютъ себѣ слѣдующимъ образомъ,

Ежели

Ежели линея CM около одного своего конца C будетъ обращаться до тѣхъ поръ, пока не придетъ на прежнее свое мѣсто; то самая линея опишетъ кругъ, а конецъ линеи M опишетъ окружность. Изъ сего явствуетъ, что въ кругѣ всѣ радiусы суть равны между собою, что поперешникъ есть вдвое больше радiуса, и что круги равными радiусами описанные, или которыхъ поперешники равны, суть также равны между собою.

25) Окружность круга есть ~~кругая~~ кривая линея, о которой простая Геометрiя разсуждаетъ, и которая при рѣшенiи задачъ употребляется, потому что оную такъ легко, какъ и прямую линею, изъ данной точки въ данномъ отъ оной разстоянiи помощiю циркула на бумагѣ написать можно.

26) Окружность всякаго круга Геометры раздѣляютъ на 360 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая называется *градусъ*, и означается (°), какъ на примѣръ 3°, значитъ три градуса. Всякой градусъ раздѣляютъ на 60 равныхъ частей, и такiе части, которыхъ 60 составляютъ одинъ градусъ, называются *минуты*, и означаются знакомъ (′), на примѣръ 4′, значитъ четыре минуты. Всякая минута раздѣляется на 60 секундъ, которыхъ знакъ есть (″); секун-

да

да на 60 терцій, и такъ далѣе, такъ что въ окружности каждаго круга будетъ содержаться 360 град: минутъ 21600, секундъ 1296000, терцій 77760000.

27) Ужѐ выше сказано, что углы суть нѣкоторой родъ количествъ, и для раздѣленія оныхъ надлежитъ имѣть нѣкоторую особливую мѣру. Геометры употребляютъ къ размѣренію оныхъ дуги круговъ слѣдующимъ образомъ. Когда хотятъ вымѣрять данной уголъ ACM; то ищутъ содержаніе дуги находящейся между боками CM и CA къ цѣлой окружности изъ верьху угла описанной. Но содержаніе дуги am къ своей окружности ambd есть одинако съ содержаніемъ дуги AM къ своей окружности AMBD. Слѣдовательно всякою дугою изъ точки C между боками угла описанною данной уголъ мѣрять можно. Яснѣе сіе будетъ изъ послѣдующихъ.

Fig. 5.

28) Что дугу изъ верьху угла между боками содержащуюся за мѣру приняли, тому причиною есть, что представить можно, бутто уголъ происходитъ равно какъ кругъ. Представь себѣ, будто бы бокъ AD сперьва положенъ былъ на бокъ AB, потóмъ нáчалъ бы двигаться около точки C, такъ чтобъ въ оной былъ неподвиженъ, и напослѣдокъ дошедъ до точки D остановился. Такимъ образомъ

Fig. 2. A

всякая

всякая точка на линеѣ AD взятая опишетъ дугу пропорцїональну своему полупоперешнику.

29) Помощїю описанїя круга данныя двѣ линеи слагаются, и одна изъ другой вычитается слѣдующимъ образомъ: Пусть данныя линеи будутъ AB и EF: изъ точки B за центръ взятой разстоянїемъ другой линеи EF опиши окружность круга помощїю инструмента циркулъ называемаго, и будетъ AC=AB−EF и AD=AB+BD.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 11.

30) *Прямолинейная фигура* [Rectilinea] называется, которой всѣ бока суть прямыя линеи; и ежели всѣ бока будутъ между собою равны такъ какъ и углы, то называется *регулярная* [Regularis]. Прочїя фигуры, которыхъ бока суть кривыя линеи, или прямыя съ кривыми перемѣшанныя, называются *криволинейныя* [Curvilineæ].

Примѣчанiе.

31) Всякая фигура, которой бока суть прямыя линеи, столько имѣетъ угловъ, сколько боковъ въ фигурѣ находится. Чтобъ

фигура

фигура прямолинейная пространство между
предѣлами своими заключала, по крайней
мѣрѣ три бока имѣть должна.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 12.

32) И по сему фигура плоска
прямолинейная, тремя боками окружен-
ная, называется *треугольникъ* [Triangu-
lum] : Фигура четырьмя боками окру-
женная *четвероугольникъ* [Quadrilaterum]
пятью боками ограниченная *пятиуголь-
никъ* [Pentagonum], и такъ далѣе. Вооб-
ще фигуры плоскія прямолинейны
больше, нежели четыре бока, имѣющія
называются *многоугольныя* [Polygona]

Примѣчаніе.

33) Происхожденіе треугольника н
данной плоскости всякъ себѣ вообразить мо
жетъ, ежели концы двухъ линей, уголъ со
ставляющихъ, соединены будутъ прямо
линеею. На примѣръ пусть данной уголъ бу
Fig. детъ ABC ; бока наклоненіе дѣлающіе AB
7. BC, фигура, которую треугольникомъ на
звали, произойдетъ, ежели точки A и
линеею AC соединятся.

34) Въ фигурахъ ничего больше не при
мѣчается, какъ углы и линеи, и потому раздѣ
лен

ленiе фигуръ неотмѣнно отъ угловъ и боковъ брать должно будетъ, и по нимъ одинъ треугольникъ отъ другаго различать. Понеже треугольникъ происходитъ отъ наклоненныхъ между собою двухъ линей AB и BC, и третiею AC соединенныхъ; то явствуетъ, что въ треугольникѣ могутъ быть всѣ бока неравные, или два между собою равные, или всѣ три равные.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 13.

35) Треугольникъ, котораго всѣ стороны суть между собою равны, называется *равносторонной* [aequilaterum] котораго, бока только или двѣ стороны равны, называется *равнобокой* или *равнобедренной* [aequicrurum]; а треугольникъ, котораго ни одинъ бокъ не равенъ другому, называется *неравносторонной* [scalenum].

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 14.

36) Ежели въ треугольникѣ будетъ одинъ уголъ прямой, то треугольникъ называется *прямоугольной* [Rectangulum]. Ежели будетъ одинъ тупой, называется *тупоугольной* [Obtusangulum]; А ежели всѣ углы будутъ острые,

острые, то называется *остроуголь-ной* [acutangulum].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 15.

37) *Параллельныя линеи* [lineae parallelae] суть тѣ, которыя будучи на одной плоскости вездѣ между собою тожъ разстояніе имѣютъ, какъ далеко оныя ни протянуты будутъ.

Примѣчаніе.

38) Разстояніе между точками, есть линея оныя соединяющая; разстояніе точки
Fig. отъ линеи, есть перпендикулярная отъ
8. точки къ данной линеѣ проведенная; разстояніе между параллельными линеями должно разумѣть перпендикулярныя линеи къ параллельнымъ EF и GH.

ТЕОРЕМА 1.

39) *Ежели на одну точку* O
Fig. *прямой линеи упадутъ нѣсколько*
9. *прямыхъ линей* OD, OE, OC; *то сумма угловъ, которые помянутыя линеи дѣлаютъ, какъ по одну сторону линеи* AB, *такъ и по другую равна будетъ двумъ прямымъ угламъ*

угламъ т. е. AOD+DOE+EOB$=2$R *и* AOC+COB$=2$R.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже сумма угловъ со всякой стороны равна углу AOB, а уголъ AOB равенъ двумъ прямымъ (20); слѣдовательно AOD+DOE+EOB$=2$R, и AOC +COB$=2$R.

Слѣдствіе.

40) Сумма всѣхъ угловъ около точки на плоскости какой нибудь поставленныхъ будетъ равна четыремъ прямымъ.

ТЕОРЕМА 2.

41) *Ежели линея* CD *пересѣчетъ другую* AB *въ точкѣ* O, *то углы на крестъ* AOB *и* DOB *будутъ между собою равны.* Fig. 10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже AOD+DOB$=2$R, также AOC+AOD$=2$R (20); слѣдовательно будетъ AOD+DOB$=$AOC+AOD и DOB$=$AOC (40 Ариѳ:).

 ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 3.

Fig. 11. 42) *Ежели въ двухъ треуголь- никахъ* ABC *и* abc *будетъ* AC=ac *и* AB=ab, *притомъ углы содержащіеся между сими боками будутъ равны, то есть* CAB=cab, *то и всѣ другія части треугольниковъ будутъ равны между собою.* C=c, B=b *и* CB=cb.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже бокъ AB=ab, то ежели треугольникъ ~~ACB~~ acb положится на треугольникъ ACB, такъ чтобъ точка a упала на точку A, бокъ ab упалъ на бокъ AB, то AB будетъ со всѣмъ закрытъ, точка b упадетъ на точку B (8); а для равенства угловъ ABC и abc, и боковъ AC и ac, бокъ ac упадетъ на AC, и его со всѣмъ закроетъ, точка c упадетъ на точку C; слѣдовательно бокъ cb долженъ будетъ упасть и покрыть CB, и треугольникъ ACB со всѣмъ закрытъ будетъ треугольникомъ acb. По сему треугольники ACB и acb будутъ равны между собою (22), уголъ C=c, B=b, и CB=cb.

Слѣд

Слѣдствїе 1.

43) Ежели въ двухъ треугольникахъ ABC и abc сверьхъ того, что AB=ab, AC=ac, BAC=bac, будетъ притомъ AB =AC=ab=ac, то когда треугольникъ abc положится на другой ABC, такъ чтобъ уголъ a упалъ на A, а бокъ ab упалъ на AC, тогда бокъ ac упадетъ на AB, и одинъ другаго закроетъ. Точка b упадетъ на точку C, точка c упадетъ на точку B, и бокъ cb упадетъ на бокъ CB; слѣдовательно не только будетъ b=B, но еще b=C, то есть въ треугольникѣ равнобокомъ углы равнымъ бокамъ противолѣжащїе суть между собою равны.

Слѣдствїе 2.

44) По сему въ треугольникѣ равностороннемъ всѣ углы между собою будутъ равны, и такой треугольникъ будетъ фигура регулярная.

ТЕОРЕМА 4.

45) *Ежели одного треугольника ABC будетъ бокъ одинъ AB равенъ боку ab другаго треугольника abc, и по два угла одинакое положенїе въ разсужденїи боковъ имѣющїе будутъ* Fig. 12.

 между

между собою равны , напр: A=a , *и* CBA=b , *то и другія части треуголь-никовъ будутъ равны между собою* *бокъ* AC *будетъ* =ac, CB=cb , *и* C=c.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Такъ какъ въ доказательствѣ преж-ней Теоремы пусть треугольника ab бокъ ab положенъ будетъ на AB ; тогда одинъ другаго со всѣмъ закроетъ , и для равенства угловъ A и a, CBA и b бокъ, ac долженъ будетъ упасть на AC и бокъ cb упасть на CB ; слѣдователь-но точка c упадетъ на точку C. Но ежели кто будетъ спорить , что точ-ка c упадетъ на другую какую нибудь напримѣръ на D , тогда будетъ AD =ac. И такъ по прежней теоромѣ бокъ cb долженъ бы былъ упасть на бокъ DB , и уголъ DBA равенъ бы былъ углу b. Но по положенію уголъ b=CAB , слѣдовательно бокъ AD не можетъ быть равенъ боку ac , и точка c не мо-жетъ упасть на точку D. Тожъ до-казать можно о всякой другой точкѣ D подобной ; слѣдовательно точка c должна будетъ упасть на D , и бу-детъ AC=ac , CB=cb и уголъ C=c.

Слѣд-

Слѣдствїе 1.

46) Ежели въ двухъ треугольникахъ сверьхъ положенїй въ теоремѣ упомянутыхъ будетъ a=A=b=B; то когда треугольникъ abc положенъ будетъ на другой, такъ чтобъ уголъ b упалъ на уголъ A, а уголъ a упалъ на уголъ ABC, тогда cb упадетъ на AC, ac упадетъ на CB, и будетъ cb =AC, ac=CB; слѣдовательно бокъ cb будетъ =AC, ac=CB и въ треугольникѣ два угла равные имѣющемъ, бока имъ противолежащїе будутъ между собою равны.

Слѣдствїе 2.

47) И такъ, ежели въ какомъ треугольникѣ будутъ всѣ углы равны между собою, то и всѣ бока будутъ равны же между собою, и треугольникъ равноугольной будетъ фигура регулярная.

ТЕОРЕМА 5.

48) *Ежели въ двухъ треугольникахъ всѣ бока одного треугольника равны будутъ бокамъ другаго, то и всѣ углы равнымъ бокамъ сопротиволежащїе будутъ между собою равны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 13. Пусть треугольники будут ACB и acb, въ которыхъ AC=ac, AB=ab CB=cb. Положимъ, что треугольникъ acb приложенъ къ треугольнику ACB, такъ какъ фигура представляетъ, то есть, чтобъ бокъ ab покрывалъ бокъ AB, а точка c упадала по другую сторону линеи AB. Теперь соединимъ линеею точки C и c, и произойдутъ два треугольника ACc и BCc равнобокïе; слѣдовательно уголъ ACE=AcE; и уголъ ECB=EcB и ACB=AcB (40 Ариѳм.). Изъ сего явствуетъ, что треугольникъ ACB равенъ будетъ треугольнику acb (42).

Слѣдствïе.

49) Изъ данныхъ трехъ боковъ всегда тотъ же треугольникъ произойти долженъ.

ТЕОРЕМА 6.

50). *Ежели въ двухъ треугольникахъ прямоугольныхъ* ABC *и* abc *бока уголъ острой включающïе будутъ между собою равны, какъ* AC

AC = ac ; CB = cb , то и третей бокъ AB будетъ равенъ боку ab , и треугольники будутъ равны между собою.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представимъ , что треугольникъ abc приложенъ бокомъ къ треугольнику ABC , такъ чтобъ точка c упала на C и a упала на A. Понеже углы a и A суть прямые , бокъ ab долженъ будетъ упасть на продолженную линею BA , и точка b упадетъ по другую сторону линеи AC, въ разсужденіи точки B , и такъ произойдетъ треугольникъ bCB равнобокой , и для того уголъ B будетъ = b (43) и треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику ACb (42).

ЗАДАЧА I.

51) *Изъ данныхъ трехъ линей изъ которыхъ каждая меньше , нежели двѣ другія имѣстѣ взятыя , здѣлать треугольникъ.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будутъ данныя линеи A, Fig
B , C. На прямой линеѣ DE по произво- 15.

леченію взятой отсѣки DE=A, EG=B, и DH=C, изъ точекъ E и D съ раствореніями EG и HD опиши два круга, которые гдѣ нибудь себя пересѣчь должны будутъ. Пусть мѣсто, гдѣ взаимно себя пересѣкутъ будетъ F, изъ котораго къ точкамъ E и D проведи линеи FE и DF, то произойдетъ DFE искомой треугольникъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Почеже EG=A=FE и HD=C=DF, а DE=A; слѣдовательно треугольникъ изъ данныхъ трехъ линей здѣланъ.

Слѣдствіе.

52) Ежели изъ данныхъ трехъ боковъ два будутъ между собою равны, то произойдетъ треугольникъ равнобокой; слѣдовательно треугольникъ равнобокой изъ даннаго основанія и одного боку, которой долженъ быть больше половины основанія, описать можно. А ежели всѣ бока будутъ между собою равны, то произойдетъ треугольникъ равносторонной; и такъ изъ даннаго одного боку треугольникъ равносторонкой описать можно.

ЗАДАЧА

ЗАДАЧА 2.

53) *Съ одного мѣста на другое* Fig.
означенное на линеѣ AB *перенесть* 16.
данной уголъ C.

РѢШЕНІЕ.

Пусть означенное на линеѣ AB мѣсто будетъ A; у даннаго угла на бокахъ отсѣки по произволенію линеи CD и CE, и соедини точки D и E линеею DE, изъ данныхъ трехъ линей CD, CE, DE на линеѣ AB изъ точки A здѣлай треугольникъ AFG, въ которомъ бы было AF=CD, AG=CE, FG=DE, то будетъ и уголъ A=C (48).

ТЕОРЕМА 7.

54) *Ежели двѣ параллельныя линеи* AB *и* CD *пересѣчены будутъ третьею* EF *въ точкахъ* I *и* H, *то будетъ* AIF=EHD.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точекъ I и H проведи перпен- Fig.
дикулярныя линеи AB и CD, которыя 17.

будутъ означать разстояніе между параллельными AB и CD, и будутъ равны между собою (37). Такимъ образомъ произойдутъ два треугольника GHI и IHK, въ которыхъ углы G и K будутъ прямые, GH = IK и бокъ IH обѣимъ треугольникамъ общей. Слѣдовательно треугольникъ GHI = IHK (50) и уголъ AIF = EHD.

Слѣдствіе 1.

55) Понеже уголъ AIF = углу EHD, а уголъ AIF = EIB (41); слѣдовательно, когда двѣ параллельныя линеи пересѣчены будутъ третьею, то будетъ EIB = EHD (34 ариѳм).

Слѣдствіе 2.

56) Уголъ EIB взятой вмѣстѣ съ угломъ BIH равенъ двумъ прямымъ; но уголъ EIB = EHD, слѣдовательно BIH + IHD = 2R.

Слѣдствіе 3.

Fig. 18. 57) Ежели будетъ много линей параллельныхъ между собою, какъ AB, CD; GH, и пересѣчены будутъ всѣ линеею EF, то углы EIB, EKD, ELH всѣ будутъ между

жду собою равны, и равны угламъ AIF, CKF, GKF, GLF и BIK+IKD=2R, такъ какъ и DKH+KLH=2R.

4

ТЕОРЕМА 8.

58) *Ежели двѣ линеи AB и CD* Fig. *пересѣчены будутъ третьею EF,* 19. *такъ чтобъ уголъ AIF былъ равенъ углу EHD, то линеи AB и CD будутъ параллельны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ежели линея AB не параллельна линеѣ CD, то будетъ другая какая нибудь параллельна, которая пройдетъ по точкѣ I. Пусть она будетъ LM, и для того по прежней Теоремѣ уголъ LIF долженъ бы быть равенъ углу EHD. Но по положенїю уголъ AIH=EHD, а уголъ LIF есть больше угла EHD; слѣдовательно линея LM не будетъ параллельна линеѣ CD. Тожъ можно доказать о всякой линеѣ проведенной чрезъ точку I, которая здѣлаетъ уголъ меньшей или большей угла AIF; слѣдовательно линея AB будетъ параллельна линеѣ CD.

Слѣд-

Слѣдствіе 1.

59) Ежели двѣ линеи AB и CD пересѣчены будутъ третьею EF, такъ чтобъ уголъ KIB равенъ былъ углу EHD, то линеи AB и CD будутъ параллельны, потому что когда $EIB = EHD$, то будетъ и $AIF = EML$.

Слѣдствіе 2.

60) Параллельны также линеи AB и CD будутъ, ежели линея EF оные такъ пересѣкаетъ, чтобъ сумма внутреннихъ угловъ $BIF + EHD$ равна была двумъ прямымъ вмѣстѣ взятымъ; потому что $AIF + BIF = 2R$, а ежели и $BIF + EHD = 2R$, то будетъ $AIF + BIF = BIF + EHD$, и $AIF = EHD$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 16.

61) Четвероугольникъ, котораго бока противолежащіе суть параллельны между собою, называется *параллелограммъ* [parallelogrammum].

Слѣдствіе 1.

Fig. 62) Пусть будетъ паллелограммъ
20. ABCD. Понеже $A + C = 2R$, и $B + D = 2R$, также $C + D = 2R$ и $A + B = 2R$; слѣдовательно

тельно будетъ A = D, C = B, т. е. во всякомъ параллелограммѣ углы противолежащїе суть между собою равны.

Слѣдствїе 2.

63) Ежели въ параллелограммѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то и всѣ будутъ прямые.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 17.

64) Четвероугольникъ, въ которомъ всѣ углы суть прямые, называется *прямоугольникъ* [Rectanglum]; а ежели притомъ всѣ бока будутъ между собою равны, называется *квадратъ* [Quadratum]. Фигура, въ которой хотя бока и будутъ всѣ равны между собою, но углы не прямые, называется *ромбъ* [Rhombus].

ЗАДАЧА 3.

65) *Линеѣ* AB *на плоскости проведенной, чрезъ данную точку* C *провесть параллельную линею.*

РѢШЕНIЕ.

Чрезъ точку C проведи какую нибудь линею ED, которая бы пересѣкла F 2
линею

линею AC. У точки C поставь уголъ ECG или FCD, которой бы равенъ былъ углу EDB (53); линея FG будетъ параллельна линеѣ AB (58).

ТЕОРЕМА 9.

66) *Во всякомъ треугольникѣ всѣ три угла вмѣстѣ взятые равны двумъ прямымъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 22. Чрезъ точку C проведи основанїю AB параллельную линею DE, то около точки C будутъ три угла ACD+ACB+BCE=2R (39). А понеже линея DE параллельна линеѣ AB, то будетъ ACD=CAB, и BCE=ABC (54). Слѣдовательно ACD+~~ABC~~+BCE=CAB+ACB+ABC=2R.

Слѣдствїе 1.

97) Ежели которой нибудь бокъ треугольника проложится какъ AB, то произойдетъ уголъ CBF *внѣшней* [externus] называемой, и будетъ равенъ двумъ внутреннимъ угламъ треугольника углу CBF противолежащимъ, потому что CAB+ACB +ABC

+ABC=2R и ABC+CBF=2R (39); слѣдовательно будетъ CAB+ACB+ABC=ABC+CBF, и CAB+ACБ=CBF (40 ариѳм:).

Слѣдствїе 2.

68) Ежели въ треугольникѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то сумма двухъ прочихъ равна будетъ прямому; и по сему сумма двухъ угловъ въ треугольникѣ меньше должна быть, нежели сумма двухъ прямыхъ.

Слѣдствїе 3.

69) Во всякомъ треугольникѣ, ежели данъ будетъ одинъ уголъ, то и сумма прочихъ будетъ извѣстна. И такъ, ежели въ треугольникѣ одинъ уголъ будетъ прямой, то сумма двухъ остальныхъ должна равна быть углу прямому. Слѣдовательно оба будутъ острые, и въ треугольникѣ не можетъ больше быть, какъ одинъ уголъ прямой, такъ какъ и тупой.

Слѣдствїе 4.

70) Ежели въ треугольникѣ какомъ нибудь сумма двухъ угловъ дана будетъ, то и третей будетъ извѣстенъ. И понеже въ треугольникѣ равнобокомъ углы равнымъ бокамъ

бокамъ противолежащіе суть между собою равны, то ежели уголъ одному изъ нихъ противолежащей данъ будетъ, то и другой будетъ извѣстенъ, потомъ и третей. Пусть данной уголъ будетъ $=A$, то и другой будетъ $=A$; слѣдовательно третей $=2R-2A$. А ежели третей данъ будетъ $=B$, то сумма двухъ прочихъ будетъ $=2R-B$, всякой изъ нихъ порознь $=R-\frac{1}{2}B$.

$R-\frac{1}{2}B$.

Слѣдствіе 5.

71) Во всякомъ треугольникѣ равносторонномъ всѣ углы суть между собою равны, то всякой изъ нихъ будетъ $=\frac{2R}{3}$.

ТЕОРЕМА 10.

72) *Во всякой фигурѣ прямолинейной сумма всѣхъ угловъ въ оной находящихся равна двумъ прямымъ, умноженнымъ на число боковъ, отнявъ изъ того четыре угла прямыхъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 23. Пусть будетъ фигура ABCDE, число боковъ $=N$ Изъ точки O внутрь фигуры взятой ко всѣмъ угламъ прове-

ди

ди прямыя линеи OA, OB, OC, OD, OE: такимъ образомъ произойдетъ столько треугольниковъ, сколько въ фигурѣ боковъ находится. А понеже всякаго треугольника сумма угловъ $=2R$; слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ въ треугольникахъ находящихся будетъ $=2N \times R$: Но около точки O всѣ углы взятые суть $=4R$. Слѣдовательно $A+B+C+D+E=2N \times R-4R$. 2.N×R—4R.

Слѣдствїе 1.

73) Во всякомъ четвероугольникѣ сумма всѣхъ угловъ равна четыремъ прямымъ, въ пятиугольникѣ шести, въ шестиугольникѣ осьми, и такъ далѣе.

Слѣдствїе 2.

74) Ежели фигура будетъ регулярная, то уголъ такого полигона найдется, ежели сумму всѣхъ угловъ въономъ находящихся раздѣлишь на число боковъ, то есть искомой уголъ будетъ $=\frac{(2N-4)R}{N}$.

Слѣдствїе 3.

75) Ежели какого нибудь полигона всѣ бока продолжены будутъ, какъ фигура Fig. 24. пока-

показываетъ; то сумма угловъ внутреннихъ полигона съ внѣшними, которые произойдутъ отъ продолженія боковъ будетъ $=_2 N \times R$. Но углы внутренніе полигона ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, BAF вмѣстѣ взятые съ углами около точки O положеніе имѣющими также $=_2 N \times R$, то есть $ABC+CBI+BCD+KCD+CDE+EDL+DEF+FEM+EFA+AFG+FAB+BAH=ABC+BCD+CDE+DEF+EFA+FAB+_4R$. слѣдовательно $CBI+KCD+EDL+FEM+AFG+BAH=_4R$. Тожъ должно разумѣть о всякомъ полигонѣ, то есть сумма угловъ внѣшнихъ равна четыремъ прямымъ.

ЗАДАЧА 4.

76) *Данной уголъ раздѣлить на двѣ равныя части.*

РѢШЕНІЕ.

Fig. 25. Пусть данной уголъ будетъ ABC: на бокахъ AB и BC изъ точки B отсѣки по равной линеѣ DB и BE; потомъ точки D и E соедини линеею DE, на линеѣ DE здѣлай какой нибудь треугольникъ равнобокой DFE: На послѣдокъ изъ точки F къ точкѣ B проведи прямую линею BF, которая данной уголъ раздѣ-

раздѣлитъ на двѣ равныя части ABF и FBC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Въ треугольникахъ BDF и BEF бокъ BD=BE, бокъ DF = боку EF, а BF обѣимъ треугольникамъ общей; слѣдовательно треугольникъ BDF = треугольнику BEF (§ 48), и уголъ DBF = углу EBF.

Слѣдствїе 1.

77) Подобнымъ образомъ уголъ равной двумъ прямымъ на двѣ части раздѣлится, то есть чрезъ данную точку на прямой линѣе проведется къ ней перпендикулярная (§ 17). Пусть данъ будетъ уголъ ACB раздѣлить на двѣ равныя части, то есть чрезъ точку C провесть перпендикулярную къ линѣе AB. Изъ точки C возми CD=CE, и на линѣе DE поставь треугольникъ равнобокой DFE: линея изъ F къ точкѣ C проведенная раздѣлитъ уголъ ACB на двѣ равныя части, и будетъ перпендикулярна къ линѣе AB. Fig. 26.

Слѣдствїе 2.

78) Понеже въ треугольникѣ DFE бокъ DF=FE, и треугольникъ DFC= треугольнику

угольнику FCE, то и углы между равными боками содержащiеся будутъ между собою равны. Слѣдовательно ежели въ треугольникѣ равнобокомъ къ основанiю проведется изъ верьху линея FC, котораябы оное дѣлила на двѣ равныя части; то не только FC перпендикулярна будетъ къ линеѣ DE, но какъ уголъ основанiю противолежащей, такъ и треугольникъ DFE раздѣлитъ на двѣ равныя части.

ЗАДАЧА 5.

79) *Данную линею* AB *раздѣлить на двѣ равныя части.*

РѢШЕНIЕ.

Fig. 27. На линеѣ AB здѣлай треугольникъ равнобокой ACB; потомъ уголъ ACB раздѣли на двѣ равныя части, какъ выше сего показано, линея CD, которая дѣлить будетъ уголъ на двѣ равныя части, раздѣлитъ также и линею AB на двѣ равныя части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже AC = CB, уголъ ACD = углу DCB, и линея CD обѣимъ треугольникамъ, какъ треугольнику AE[D] так

такѣ и треугольнику DCB общая; слѣдовательно треугольникѣ ACD = треугольнику CDB (§ 42), и линея AD равна будетѣ линеѣ DB

Слѣдствïе.

80) Ежели вѣ треугольникѣ равнобокомѣ проведется изѣ верьху линея CD, которая бы дѣлила уголѣ на двѣ равныя части, то не только линею AB, но и цѣлой треугольникѣ раздѣлитѣ на двѣ равныя части, и кѣ основанïю будетѣ перпендикулярна.

ЗАДАЧА 6.

81) *Изѣ точки какой нибудь кѣ данной линеѣ провесть перпендикулярную линею.*

РѢШЕНIЕ.

Пусть будетѣ данная линея AB и точка C, изѣ которой сѣ раствоpенïемѣ циркула по произволенïю взятымѣ опиши дугу EFG, которая бы прорѣзывала линею AB вѣ двухѣ точкахѣ E и G; линею EG раздѣли на двѣ равныя части вѣ точкѣ D, линея CD будетѣ искомая перпендикулярная. Fig. 28.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже CE и CG суть полупоперешники тогожъ круга, то будетъ CE=CG, потомъ ED=GD, а CD обѣимъ треугольникамъ, какъ треугольнику CED, такъ треугольнику EDG общей, слѣдовательно треугольникъ CED = треугольнику EDG (§ 48), и уголъ CDA= углу CDB, слѣдовательно суть прямые (§ 17).

ТЕОРЕМА 11.

82) *Во всякомъ треугольникѣ бокъ большей противолежитъ углу большему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 29. Ежели въ треугольникѣ ACB будетъ уголъ CBA больше угла CAB, то надлежитъ доказать, что AC будетъ больше нежели CB. Здѣлай уголъ DBA равнымъ углу CAB, и будетъ AD =DB (§ 46). Потомъ придай къ обѣимъ CD, то будетъ AD+DC=DB+CD. Но DB+CD есть сумма двухъ боковъ въ треугольникѣ BDC, которая должна быть больше, нежели бокъ AC. Слѣдовательно

тельно DB+DC=AC будетъ больше, нежели бокъ треугольника CB.

Слѣдствіе 1.

83) Въ треугольникѣ прямомъ бокъ углу прямому противолежащей есть большей изо всѣхъ прочихъ. Въ треугольникѣ тупоугольномъ большей бокъ будетъ тупому углу противолежащей.

Слѣдствіе 2.

84) Ежели изъ точки какой нибудь, как C, къ линеѣ AB опустится перпендикулярная CD; то она будетъ самая кратчайшая между точкою C и линеею AB, потому что ежели проведешь какую нибудь другую какъ CE, то въ треугольникѣ прямоугольномъ CDE бокъ CE противолежать будетъ углу прямому. Fig. 30.

Слѣдствіе 3.

85) Ежели изъ точки C проведена будетъ другая линея CG внѣ угла DCE; то она будетъ больше, нежели CE, потому что въ треугольникѣ CGE, бокъ CG противолежитъ углу тупому (§ 83). Тожъ должно разумѣть и о другихъ линеяхъ изъ точки C внѣ угла DCE или DCG проведенныхъ.

слѣдовательно чѣмъ точка G на линеѣ AB далѣе отъ точки D берется, тѣмъ линея CG будетъ больше, и по одну сторону линеи CD двѣ линеи изъ точки C проведенныя равны между собою быть не могутъ. Но ежели по другую сторону линеи CD возмется FD =DE, то будетъ FC=CE (§ 42) Изъ сего видно, что изъ точки C къ линеѣ не можно больше двухъ линей провесть равныхъ между собою.

Слѣдствїе 4.

86) Ежели данъ будетъ бокъ CG и уголъ CGA, и притомъ бокъ данному углу противолежащей; то ежели данной бокъ будетъ меньше, нежели перпендикулярная CD, треугольника описать не можно. Ежели оной будетъ равенъ перпендикулу, то изъ сихъ данныхъ не можно больше описать, какъ одинъ треугольникъ; а ежели бокъ данной будетъ больше перпендикулярной CD, а меньше боку CG; то два треугольника здѣланы быть могутъ CEG и CFG, потому что CF=CE, и одинъ только треугольникъ здѣлать можно, ежели данной бокъ будетъ равенъ боку CG, или его больше. Изъ сего явствуетъ, что изъ данныхъ двухъ боковъ и угла между ими несодержащагося треугольникъ не всегда опредѣлить можно.

Примѣ-

Примѣчаніе.

87) Теперь можно видѣть, что дано быть должно, чтобъ треугольникъ описать можно было, а имянно: когда даны будутъ 1) два бока и уголъ между ими содержащейся. 2) бокъ и два угла при бокѣ данномъ находящіеся. 3) всѣ три бока, и 4) въ треугольникѣ прямоугольномъ два бока уголъ острой заключающіе. Въ § 51 дано рѣшеніе, коимъ образомъ изъ данныхъ трехъ линей треугольникъ дѣлать должно. Протчихъ случаевъ рѣшенія сообщены будутъ послѣ.

ГЛАВА 2.

О КРУГѢ И ФИГУРАХЪ ВЪ НЕМЪ И ОКОЛО ЕГО ОПИСАННЫХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 18.

88) Прямая линея AB двѣ точки окружности A и B соединяющая называется *хорда* [Chorda] частей, на которыя она окружность раздѣляетъ, а части окружности ADB и AEB называются *дуги* [Arcus]. Fig. 31.

Слѣдствїе.

89) Такимъ образомъ и поперешникъ, линея которая проходитъ чрезъ центръ круга, называться можетъ хордою.

ТЕОРЕМА 12.

90) *Хорда не можетъ больше прорѣзать окружность, какъ въ двухъ точкахъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 32. Положимъ, что хорда AB прорѣжетъ окружность въ трехъ точкахъ A, B и D, то изъ центра C проведенныя къ точкамъ A, B, D прямыя линеи должны быть между собою равны (§ 24), но CD больше, нежели BC. Слѣдовательно хорда въ трехъ точкахъ окружность прорѣзать не можетъ, ни окружность пройти чрезъ три точки на той же и одной прямой линеѣ находящїеся.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 19.

91) Всякая часть круга ADB и AEB, на которые хорда раздѣляетъ называется *сегментъ* [Segmentum], а фигура

гура между радіусами и дугою содержащаяся называется *секторъ* [Sector].

ТЕОРЕМА 13.

92) *Ежели въ томъ же кругѣ или въ двухъ равныхъ между собою радіусы* AC, CB *и* ac, cb *равные углы* ACB *и* acb *заключаютъ, то какъ секторы* ACBD *и* acbd, *такъ и дуги* ADB *и* adb *будутъ между собою равны. И обратно, ежели въ равныхъ кругахъ будутъ секторы или ихъ дуги равны между собою, то и углы между радіусами содержащіеся будутъ равны же.* Fig. 33.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ 1) уголъ ACB = углу acb. Представь себѣ, что центръ круга ADB положенъ на центръ круга ADB такъ чтобъ радіусъ ac упалъ на AC, то точка a упадетъ на A, радіусъ cb упадетъ на CB, такъ что и точка b упадетъ на точку B, и дуга ab упадетъ на AB. Ибо ежели бы дуга ab не упала на AB; но на AdB, то бы было Cd = CD, чему быть не можно. Для подобной причины дуга ab ни 76

внутрь

внутрь дуги AB упасть не может. Слѣдовательно дуга ab упадет на AB, и будут между собою равны, так как и секторы ACB и acb.

2) Пусть будет дуга ab=AB, и ежели угол acb не будет равен углу ACB, то здѣлай ему равной BCE, и будет EAB=ab (нум. 1); но ab=AB Слѣдовательно и AB должна быть =ABE, чего быть не может. Слѣдовательно угол ACB= углу acb. Подобным образом докажется равенство углов, ежели секторы будут равны.

Слѣдствіе 1.

Fig. 34. 93) Ежели дан будет угол какой нибудь ACB и из верьху C с разтвореніем по произволенію взятым опишется дуга AB, и ежели угол ACB раздѣлится на нѣсколько равных частей ACF, FCD, DCE и ECB, то на столькож равных частей и дуга раздѣлится, и обратно, ежели дуга на нѣсколько равных частей раздѣлена будет в точках F, D, E, и чрез оные проведутся линеи FC, DC, EC, то и угол на столькож равных частей раздѣлен будет.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

94) Ежели въ кругѣ проведутся два поперешника AB и ED, такъ чтобъ углы у центра были прямые, то есть ACE = ECB = BCD = ACD, то и окружность раздѣлена будетъ на четыре равные части откуду видно, что всякой поперешникъ кругъ и его окружность раздѣляетъ на двѣ равныя части. Fig. 35.

Слѣдствіе 3.

95) Ежели изъ верьху угла C дуга между боками CA и CB описанная будетъ четверть окружности, то уголъ ACB будетъ прямой, ежели меньше четверти окружности, вострой, а ежели больше четверти окружности то уголъ будетъ тупой.

ТЕОРЕМА 14.

96) *Ежели въ томъ же кругѣ, или въ двухъ равныхъ протянуты будутъ равные хорды, то дуги ими отрѣзанныя и сегменты будутъ между собою равны: И ежели въ равныхъ кругахъ взяты будутъ равныя дуги, то хорды имъ соотвѣтствующія, и сегменты будутъ между собою равны же.*

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 35. 1) Пусть въ равныхъ кругахъ ABD и abd хорда AB будетъ равна хордѣ ab, то понеже AC=CB=ac=cb треугольникъ ACB будетъ равенъ треугольнику acb, уголъ ACB= углу acb (§ 48). Дуга AB будетъ равна дугѣ ab. Секторъ ACB= сектору acb (§ 92). Сегментъ AEB= сегменту aeb, дуга ADB= дугѣ adb. Сегментъ ADB= сегменту adb (§ 40 Ариѳ.).

2) Ежели дуга AEB= дугѣ aeb, то будетъ и уголъ ACB= углу acb (§ 92). Слѣдовательно секторъ ACBE = сектору acbe, треугольникъ ACB= треугольнику acb, хорда AB= хордѣ ab, и сегментъ AEB= сегменту aeb.

Слѣдствіе.

Fig. 37. 97) И такъ, когда надобно отъ полуокружности ACB или какой другой отрѣзать дугу DE тѣмъ же радїусомъ описанную, то надлежитъ меньшей дуги взять хорду DE, и ее перенесть изъ точки A на C, тогда будетъ хорда AC= хордѣ DE, и дуга ED= дугѣ AC, а CB=ACB−DE.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 15.

98) *Ежели изъ центра круга къ хордѣ проведена будетъ перпендикулярная, то она хорду и дуги ей соотвѣтствующія раздѣлитъ на двѣ равныя части: И обратно линея, которая хорду дѣлитъ на двѣ равные части, и чрезъ центръ проходитъ къ хордѣ будетъ перпендикулярна: Также линея, которая хорду раздѣляетъ на двѣ равные части, и къ ней перпендикулярна проходитъ чрезъ центръ круга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ въ кругѣ AEBF, которaго центръ есть C, хорда AB, и къ ней изъ C проведана перпендикулярная CD. Проведи также изъ центра C линеи CA и CB, такимъ образомъ произойдетъ треугольникъ равнобокой ACB, слѣдовательно линея CD, ежели будетъ перпендикулярна къ линеѣ AB, то ее пересѣчетъ на двѣ равные части (§ 50) и уголъ ACE будетъ равенъ углу BCE. Продолжи теперь линею CD въ обѣ стороны до окружности, Fig. 38.

сти,

сти, и проведи хорды AE, BE и AF, BF. Понеже уголъ ACD= углу BCD, то будетъ и дуга AE= дугѣ EB, хорда AE= хордѣ EB (§ 92. 96). Потомъ уголъ FCB= углу FCA, то будетъ и дуга AF= дугѣ FB и хорда AF= хордѣ BF.

2) Ежели линея CD проходящая чрезъ центръ пересѣчетъ хорду на двѣ равные части, то будутъ углы ADC и CDB прямые (§ 78).

3) Когда линея EF будетъ перпендикулярна къ линеѣ AB, и ее раздѣлить на двѣ равныя части, то будетъ въ треугольникахъ ADE и EDB, AD=DB, уголъ ADE= углу BDE, DE обѣимъ общая; слѣдовательно какъ хорды AE и EB такъ и дуги AE и EB будутъ равны между собою (§ 42, 92). Такимъ же образомъ доказано будетъ что хорда AF= хордѣ BF и дуга AF = дугѣ FB. Слѣдовательно и EAF =EBF, и линея EF будетъ поперешникъ.

Слѣдствіе 1.

99) Когда требуется данную дугу раздѣлить на двѣ равныя части, то надлежитъ

житъ хорду ея перпендикулярною линеею раздѣлить на двѣ равныя части, и продолжить до дуги.

Слѣдствїе 2.

100) Изъ сего видно, коимъ образомъ въ данновъ кругѣ центръ найти можно. Пусть будетъ данной кругъ AFB. въ немъ по произволенїю проведи хорду AB, и ее раздѣли на двѣ равныя части, чрезъ средину хорды D проведи къ ней перпендикулярную линею EF, которая бы окружность прорѣзывала, напослѣдокъ линею EF раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ C, которая будетъ искомой центръ. Fig. 39.

ЗАДАЧА 7.

101) *Чрезъ данныя три точки, которыя бы не на одной прямой линеѣ положены были, или около даннаго треугольника описать кругъ.*

РѢШЕНIЕ.

Пусть данныя точки будутъ A, B, C; соедини ихъ прямыми линеями AB, BC, и раздѣли всякую на двѣ равныя части въ точкахъ D и E, чрезъ Fig. 40.

 кото-

которыя проведи къ соединяющимъ данныя точки линеямъ перпендикулярныя линеи FD и GE, и ихъ до тѣхъ мѣстъ продолжи, пока взаимно себя не пересѣкутъ, напримѣръ въ H, изъ точки H разстоянїемъ AH, или BC, или CH опиши кругъ, которой пройдетъ чрезъ данныя три точки.

H

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи линеи HC, HB, HA. Понеже въ треугольникахъ BEH, CEH углы BEH и CEH суть прямые, BE=EC, и EH обоимъ треугольникамъ общая, то будетъ BH=CH (§ 42) Для подобной причины будетъ и BH=AH. Слѣдовательно CH=BH=AH, и окружность изъ точки H описанная пройдетъ чрезъ точки A, B, C.

Слѣдствїе.

102) Ежели дана будетъ дуга какого нибудь круга, то онаго центръ найти можно будетъ. Пусть будетъ данная дуга ABC. По произволенїю проведи двѣ хорды AB и BC, раздѣли всякую изъ нихъ на двѣ равныя части перпендикулярными линеями FD

Fig. 41.

FD и GE, гдѣ помянутыя линеи себя взаимно пересѣкутъ, тутъ будетъ искомой центръ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 20.

103) *Касательная* [Tangens] *линея* называется, которая чрезъ какую нибудь точку окружности такъ проходитъ, что вся внѣ круга падаетъ.

ЗАДАЧА 8.

104) *Чрезъ данную точку окружности провесть касательную линею.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть данная точка окружно- Fig.
сти будетъ A, а C центръ даннаго 42.
круга, изъ C чрезъ точку A проведи прямую линею CE, потомъ чрезъ точку A къ линеѣ CE проведи перпендикулярную линею FG, которая будетъ касательная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линея касательная должна падать вся внѣ круга, то должно доказать,

казать, что всякая точка линеи FG, ежели она касательная, кромѣ точки A падаетъ внѣ круга; и для того на линеѣ FG возми по произволенїю точку F, и къ ней изъ центра проведи линею CF, которая для того, что противолежитъ углу прямому будетъ больше, нежели CA (§ 83), и больше, нежели CH, слѣдовательно точка F падаетъ внѣ круга, такимъ образомъ можно доказать о всякой точкѣ кромѣ A. Слѣдовательно FG будетъ касательная линея.

Слѣдствїе.

105) И такъ прямая линея не можетъ больше, какъ въ одной точкѣ до круга касаться.

ТЕОРЕМА 16.

106) *Ежели линея прямая касается круга, и къ точкѣ прикосновенїя изъ центра круга проведется радїусъ, то онъ будетъ съ касательною линеею составлять уголъ прямой, и ежели изъ центра къ касательной линеѣ проведется*

недется перпендикулярная, то она упадетъ въ точку прикосновенія.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть будетъ касательная линея FG, проведи къ точкѣ A, гдѣ она до круга касается, линею CA. Ежели она не будетъ перпендикулярна, то будетъ другая какая нибудь, напримѣръ CF, и будетъ CFA уголъ прямой, и CA больше, нежели CF. Слѣдовательно F упадетъ внутрь круга, что будетъ противно опредѣленію. Тожъ можно доказать о всякой другой линеѣ кромѣ CA. Слѣдовательно CA будетъ перпендикуларна. Fig. 42.

2) Ежели перпендикулярная линея изъ центра къ касательной проведенная упадетъ не въ точку прикосновенія, но въ другую F, то когда проведешь линею CF, то она будетъ перпендикулярна, чего быть не можетъ.

ЗАДАЧА 9.

107) *Въ данномъ треугольникѣ описать кругъ, котораго бы окружность*

ность касалась до всѣхъ трехъ боковъ треугольника.

РѢШЕНІЕ.

Fig. 43. Пусть будетъ треугольникъ ABC, возми которой нибудь уголъ, напримѣръ ABC, и раздѣли его линеею BD на двѣ равныя части, тожъ здѣлай и съ другимъ BAC, потомъ изъ точки F, гдѣ линеи AI и BD себя пересѣкаютъ, и которая будетъ искомой центръ, опусти къ бокамъ треугольника перпендикулярныя линеи FG, FH, FI, кругъ описанной изъ точки F пройдетъ чрезъ точки G, I и H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже въ треугольникахъ BGF и BHF уголъ GBF = углу FBH линея BF обоимъ треугольникамъ общая, и углы BGF и BHF суть прямые, треугольникъ BGF будетъ равенъ треугольнику BFH (§ 45), и бокъ GF = FH. Подобнымъ образомъ докажется, что и GI = GF; слѣдовательно кругъ изъ точки F описанной пройдетъ чрезъ точки G, H, I.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 17.

108) *Въ томъ же или равныхъ кругахъ уголъ у центра находящейся, есть вдвое больше угла при окружности находящагося и на той же дугѣ стоящаго.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Три случая быть могутъ, или центръ круга упадетъ на бокъ угла при окружности, или внѣ, или внутрь онаго.

1) Пусть центръ круга C упадетъ на бокъ AD угла у окружности, и какъ уголъ у центра ACB, такъ и уголъ у окружности ADB стоятъ на той же дугѣ AB. Проведи линею DB и будетъ ACB=ADB+CBD (§ 67). Но уголъ CDB= углу CBD (§ 43). Слѣдовательно ACB=2ADB. Fig. 44.

2) Ежели центръ упадетъ внутри угла у окружности ADB находящагося проведи чрезъ D и C линею DE, то будетъ ACE=2ADE и ECB=2EDB (§ 67, 43). Слѣдовательно ACE+ECB=2ADE+2EDB =2ADB. Fig. 45.

 3)

Fig 46 3) Ежели центръ C будетъ внѣ угла ADB, то чрезъ D и C проведи линею ED, точки D и B соедини линеею DB (§ 43) и будетъ уголъ ACE = CAD + ADC = 2EAD, и уголъ ECB = EDB + CBD = 2EDB (§ 67) Слѣдовательно ECB − ECA = ACB = 2EDB − 2EDA = 2ADB.

A

Слѣдствїе 1.

109) Ежели дуга AB возмется за мѣру угла ACB, какъ и обыкновенно бываетъ, то мѣра угла при окружности находящагося будетъ половина дуги, на которой стоитъ.

Слѣдствїе 2.

110) Углы при окружности, въ томъ же или равныхъ кругахъ на равныхъ дугахъ стоящїе, суть равны между собою.

Слѣдствїе 3.

111) Уголъ, стоящей на полуокружности есть прямой уголъ; стоящей на дугѣ, которая больше полуокружности, будетъ тупой, а уголъ стоящей на дугѣ, которая меньше полуокружности будетъ, острой.

Слѣд-

Слѣдствїе 4.

112) Ежели прямая линея AB коснется круга, то уголъ ABD у окружности находящейся, будетъ стоять на дугѣ BD, слѣдовательно мѣра его будетъ половина дуги BD. Fig. 47.

ТЕОРЕМА 18.

113) *Ежели въ кругѣ двѣ линеи AD и CB взаимно себя пересѣкутъ, но не въ центрѣ, то мѣра угловъ AEB+CED=2AEB будетъ сумма дугъ AFB+CGD, на которыхъ оные углы стоятъ.* Fig. 48.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Точки A и C соедини линеею AC, B и D линеею BD, такимъ образомъ будетъ CED=CBD+ADB. Но мѣра угла CBD=$\frac{1}{2}$CGD, и мѣра угла ADB =$\frac{1}{2}$AFB Слѣдовательно мѣра угла CED=$\frac{1}{2}$CGD+$\frac{1}{2}$AFB, и мѣра 2CED=2AEB будетъ =CGD+AFB.

Слѣдствїе.

114) Ежели двѣ линеи AC и BD продолженные пересѣкутъ себя взаимно внѣ круга Fig. 49.

круга въ точкѣ E, то угла AEB мѣра будетъ $=\frac{1}{2}AGB-\frac{1}{2}CFD$, потому что ACB $=AEB+CBD$ и $AEB=ACB-CBD$.

ЗАДАЧА 10.

115) *Къ данному положенїемъ кругу чрезъ данную точку внѣ круга провесть касательную линею.*

РѢШЕНIЕ.

Fig. 50. Пусть будетъ данной кругъ DCE, и точка B, которую съ центромъ круга A соедини прямою линеею AB, и около ея опиши кругъ CBD, который прежней прорѣжетъ въ двухъ точкахъ C и D. Линеи CB и DB будутъ касательныя линеи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи радїусы AC и AD, таобразомъ произойдутъ углы ACB и ADB прямые (§ 111). Слѣдовательно линея CB будетъ касательная въ точкѣ C, а линея DB касательная въ точкѣ D (§ 106).

Слѣд-

Слѣдствіе.

116) Слѣдовательно изъ данной точки къ кругу двѣ касательныя линеи проведены быть могутъ.

ЗАДАЧА 11.

117) *На концѣ данной линеи постапить перпендикулярную линею.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть данная линея будетъ AB, Fig. 51.
и точка, изъ которой надлежитъ возвысить перпендикулярную линею, A; возми по произволенію надъ линеею точку C, и изъ нее чрезъ A опиши кругъ, которой пересѣчетъ линею въ точкѣ D, чрезъ D и C проведи прямую линею DE, линея соединяющая точки A и E будетъ искомая перпендикуларная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Уголъ EAB стоитъ на полуокружности, слѣдовательно линея EA къ AB будетъ перпендикулярна (§ 111).

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 19.

118) *Въ четыреугольникѣ въ кругѣ написанномъ, сумма угловъ есть равна ~~двумъ~~ прямымъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть въ кругѣ ABCD начерченъ
Fig. 52. будетъ четвероугольникъ ABCD, и будетъ мѣра угла ABC$=\frac{1}{2}$ дуги ADC, мѣра угла ADC$=\frac{1}{2}$ дуги ABC (§ 109). Но ADC+ABC составляютъ цѣлую окружность. Слѣдовательно мѣра угловъ ABC+ADC будетъ равна половинѣ окружности. Тожъ докажется и подобнымъ образомъ объ углахъ A и C. Слѣдовательно сумма угловъ равна ~~двумъ~~ прямымъ.

ТЕОРЕМА 20.

119) *Около всякой фигуры и по всякой фигурѣ регулярной кругъ описать можно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 53. 1) Пусть данная фигура регулярная будетъ пятіугольникъ ABCDE, кото-

которой нибудь уголъ сего полигона раздѣли на двѣ равныя части, напр: ABC, тожъ здѣлай и съ другимъ къ нему ближайжимъ BCD, и будетъ ABF=FBC=FCB, и FB=FC. Слѣдовательно изъ точки F, гдѣ линеи BF и CF себя пересѣкаютъ, чрезъ B и C можно кругъ описать. Раздѣли потомъ и уголъ FCD на двѣ равныя части, то будетъ FDC=FCD, слѣдовательно FD=FC, и всѣ три линеи въ одной точкѣ себя пересѣчь должны. Такимъ образомъ докажется, что всѣ линеи FB, FC, FD и проч: будутъ между собою равны, и пересѣкутъ себя въ одной точкѣ F, изъ которой по точкамъ A, B, C, D, E кругъ описать можно.

2) Изъ точки F къ бокамъ фигуры проведи перпендикулярныя линеи Ff, Fg, Fh и проч: или углы у точки F раздѣли всякой на двѣ равныя части, линеи Ff, Fg, Fh для угловъ f, g, h прямыхъ, и какъ угловъ FBf, FBg, FCg, FCh, такъ и линей FB, FC, FD равныхъ между собою, будутъ также равны. Слѣдовательно изъ точки F по

точкамъ

точкамъ f, g, h въ фигурѣ регулярной кругъ описать можно.

Примѣчанїе.

120) Изъ сего видно, какъ во всякой фигурѣ регулярной, и около фигуры кругъ описать можно.

Слѣдствїе 1.

121) Въ фигурѣ регулярной уголъ у точки D находящейся найдется, ежели $4R = 360°$ раздѣлишь на число боковъ, ежели число боковъ будетъ $= N$, искомой уголъ будетъ $= \frac{4R}{N}$, а уголъ полигона будетъ $= \frac{(N-2)2R}{N}$, какъ выше сего показано.

Слѣдствїе 2.

122) Ежели фигура регулярная будетъ
Fig. детъ шестїугольникъ, то уголъ ADB бу-
54. детъ $= \frac{2R}{3}$, а уголъ полигона ABC $= \frac{4R}{3}$. Слѣдовательно уголъ DAB $=$ ABD $= \frac{1}{2}$ABC $= \frac{2R}{3}$, и треугольникъ ABD будетъ равносторонной, по сему бокъ шестїугольника регулярнаго равенъ будетъ радїусу того круга, въ которомъ написанъ быть долженъ.

Примѣ-

Примѣчаніе.

123) Ужѐ выше говорено, что въ томъ же или равныхъ кругахъ, равнымъ дугамъ равныя и хорды соотвѣтствуютъ, и углы на равныхъ дугахъ стоящіе суть равны между собою, слѣдовательно, когда требуется въ кругѣ написать фигуру регулярную, то надлежитъ окружность раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько боковъ фигура имѣть должна. Но не имѣемъ еще способа Геометрическаго, то есть помощію линейки и циркула окружность круга дѣлить на столько равныхъ частей, на сколько кто желаетъ, и по сему не всякой полигонъ въ данномъ кругѣ описать можно. И такъ другаго способа окружность дѣлить на равныя части не остается, кромѣ *Механическаго*, которой состоитъ въ слѣдующемъ. раздѣли $4R = 360^\circ$ на столько частей, сколько полигонъ боковъ имѣть долженъ, и найдется уголъ у центра, которой вымѣрявъ помощію инструмента *Транспортиръ* называемаго поставь у центра даннаго круга, и бока его продолжи, пока окружность не пересѣкутъ: Содержащаяся между боками часть окружности будетъ искомая дуга.

124) Здѣсь примѣчать надлежитъ, что когда въ кругѣ ужѐ написанъ многоугольникъ N боковъ, то можно написать

многоугольникъ, въ которомъ бы число боковъ было 2N. Въ такомъ случаѣ ничего больше не требуется, какъ всякой бокъ написаннаго полигона раздѣлить на двѣ равныя части, и чрезъ точки дѣленія изъ центра круга къ окружности провесть прямыя линеи, тогда окружность раздѣлена будетъ на 2N числомъ равныхъ частей, и полигонъ описать можно будетъ. Изъ сего всякъ понять можетъ, коимъ образомъ когда въ кругѣ написанъ полигонъ, котораго число боковъ есть 2N, написать можно въ томъ же кругѣ многоугольникъ N боковъ.

125) Какъ въ кругѣ не всякой полигонъ Геометрическимъ образомъ написать; такъ и на данной линеѣ AB, невсякой полигонъ начертить можно. Механическимъ образомъ на данной линеѣ, полигонъ регулярной описывается слѣдующимъ образомъ: Пусть данная линея будетъ AB, сыщи уголъ полигона, и по концамъ линеи AB поставь помощію Транспортира по углу, изъ которыхъ бы всякой былъ $= \frac{(N-2)R}{N}$. Изъ точки C, гдѣ себя взаимно пересѣкутъ линеи AC и CB, опиши кругъ проходящей по точкамъ A и B. По окружности сего круга бокъ AB столько разъ умѣстится, сколько N единицъ въ себѣ содержитъ.

126) Изъ того, что здѣсь о фигурахъ въ кругѣ и около его написанныхъ говорено,

рено, заключить не трудно, что всякой фигуры въ кругѣ написанной окружность меньше, а около круга описанной больше, нежели окружность самаго круга, и чѣмъ больше фигуры какъ въ кругѣ, такъ и около онаго описанныя будутъ имѣть боковъ, тѣмъ меньше будетъ разность между окружностями фигуръ и окружностью круга, такъ что ежели въ кругѣ написанъ будетъ какой нибудь полигонъ, и около его другой равное число боковъ съ прежнимъ имѣющей, то удвоенïемъ числа̀ боковъ въ обѣихъ полигонахъ можно будетъ дойти до того, что разность между окружностями будетъ нечувствительна, и что окружности ихъ съ окружностью круга напослѣдокъ сходствовать будутъ, и по сему кругъ называется полигонъ изъ безчисленнаго множества боковъ состоящей.

127) На семъ основана квадратура Архимедова, которой прежде всѣхъ содержанïе окружности къ дïаметру круга нашелъ 22 : 7. Сïе содержанïе опредѣлилъ, описавъ какъ около, такъ и внутрь круга многоугольникъ регулярной о шести бокахъ, и удвоенïе боковъ какъ внѣшняго, такъ внутренняго многоугольника продолжалъ до тѣхъ поръ, пока оба полигоны не имѣли по 96 боковъ. Ежели бы подобное удвоенïе продолжено было далѣе, тобъ аккуратнѣйшее содержанïе поперешника къ окружности найдено

но было, что и учинено отъ нѣкоторыхъ. Но о семъ пространно говорить еще не время.

ГЛАВА 3.

О ЛИНЕЯХЪ ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ И ПОДОБІИ ФИГУРЪ.

ТЕОРЕМА 21.

Fig. 56. 128) *Во всякомъ параллелограммѣ бока противолежащіе суть равны между собою, и діагональная параллелограммъ дѣлитъ на двѣ равныя части.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ параллелограммъ ABCD, проведи въ немъ діагональную линею AD, которая раздѣлитъ паллелограммъ на два треугольника. Понеже какъ бока AB и CD, такъ AC и DB суть параллельны между собою; то будетъ уголъ BAD= углу ADC, и CAD=ADB Сверьхъ сего бокъ AD обѣимъ треугольникамъ общей: слѣдовательно треугольникъ CAD будетъ ра-

равенъ треугольнику ABD (§ 45), бокъ AB=CD и CA=DB.

ТЕОРЕМА 22.

129) *Ежели изъ двухъ линей* Fig.
AB *и* CD *какое нибудь положе-* 57.
ніе на данной плоскости имѣющихъ, одна, напримѣръ AB *раздѣлена будетъ на нѣсколько равныхъ частей между собою* AE, EF, FG, *и изъ точекъ* A, E, F, G, *проведутся параллельныя линеи* AC, EH, FI, GK, *пересѣкающія линею* CD *въ точкахъ* C, H, I, K, *то и части линеи* CD *содержащіяся между параллельными линеями будутъ равны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точекъ C, H, I проведи линеѣ AB параллельныя линеи CL, HM, IN; то произойдутъ параллелограммы AL, EM, FN, въ которыхъ будетъ AE=LC, HM=EF, IN=FG (128). Понеже линеи AC, EH, FF суть параллельны между собою; углы E, F, G будутъ между собою равны, и равны

 угламъ

угламъ CLH, HMI, INK (§ 57. 55). Для подобной причины углы CHL, HIM и IKN суть между собою равны: Слѣдовательно и треугольники LCH, HMI, INK будутъ равны между собою, и CH=HI=IK. Подобнымъ образомъ доказано будетъ и о протчихъ.

Слѣдствïе.

Fig. 58. 130) Ежели линеи AB и CD такое будутъ имѣть положенïе, чтобъ точки A и C слились въ одно мѣсто; то и въ такомъ случаѣ какъ части линеи AB, такъ и части линеи CD будутъ равны между собою.

ЗАДАЧА 12.

131) *Данную линею раздѣлитъ на столько равныхъ частей, на сколько кто желаетъ.*

РѢШЕНIЕ.

Fig. 58. Пусть дана будетъ линея CD, которую должно раздѣлить на N равныхъ частей. Надлежитъ изъ точки C подъ какимъ нибудь угломъ, провесть линею CT, и на ней, начи-

ная

ная отъ C, столько отсѣчь равныхъ частей, сколько число N содержитъ въ себѣ единицъ. Конецъ данной линеи D, и послѣднюю точку линеи AT соедини прямою линеею BD, потомъ изъ точекъ замѣченныхъ G, F, E проведи линеѣ BD параллельныя. Такимъ образомъ линея CD раздѣлена будетъ на столько равныхъ частей, сколько въ N единицъ содержится.

ТЕОРЕМА 23.

132) *Ежели двѣ линеи* EF *и* GH *какое нибудь положенїе имѣющїя пересѣчены будутъ тремя параллельными линеями* AB, CD, *и* IK; *то будетъ* EF : EL = GH : GM.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Раздѣли линею EF на сколько нибудь равныхъ частей, и чрезъ точки, Fig. 59.
въ которыхъ она раздѣлена будетъ, линеямъ AB, CD и IK проведи параллельныя; то и линея GH раздѣлена будетъ на столькожъ равныхъ частей, и на сколько частей линея EF раздѣлена будетъ по линею CD, на столькожъ и линея GH раздѣлится по

 линею

линею CD. Изъ сего слѣдуетъ, что ежели линея CD упадетъ на линею LM, то будетъ EF : EL = GH : GM (§ 75 Ариѳм.).

Fig. 60. Но ежели CD не упадетъ ни на одну линею дѣлящую; то дѣли линею Ll далѣе на равныя части, и проводи линеямъ LM и lm параллельныя. Такимъ образомъ продолжая дѣленіе, напослѣдокъ линея CD должна будетъ упасть на одну изъ линей параллельно между линеями LM и lm проведенныхъ, и столько будетъ въ md частей, изъ какихъ Mm состоитъ, сколько находится въ lc; изъ какихъ Ll состоитъ. Слѣдовательно и въ семъ случаѣ будетъ Ec : EF = Gd : GH. (§ 75 Ариѳм.).

Слѣдствіе 1.

Fig. 59. 133) Подобнымъ образомъ будетъ LF : EF = MH : GH, или EL : GM = EF : GH и LF : MH = EF : GH (§ 84 Ариѳм.). Слѣдовательно будетъ EL : GM = LF, MH, и EL : LF = GM : MH. По сему EF и GH и всѣ части оныхъ, содержащіяся между параллельными линеями, будутъ пропорціональны между собою.

Слѣд-

Слѣдствіе 2.

134) Ежели точки E и G упадутъ одна на другую, такъ чтобъ произошелъ треугольникъ ABC, и проведена будетъ линея DE параллельная линеѣ BC, пересѣкающая бока треугольника; то будетъ AD: AB = AE : AC и BD : AB = EC : AC, и потомъ AD : BD = AE : EC. Fig. 61.

Слѣдствіе 3.

135) Ежели будетъ AD : AB = AE AC, и проведутся линеи BC и DE, то онѣ будутъ между собою параллельны, потому что ежели бы другая какая нибудь, какъ FE, была параллельна линеѣ BC, то бы было AF : AB = AE : AC противъ положенія.

ЗАДАЧА 13.

136) *Даннымъ тремъ линеямъ найти четвертую пропорціональную.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть данныя линеи будутъ первая a, вторая b, третья c. Подъ какимъ нибудь угломъ соедини двѣ линеи AM и AN. На которую нибудь изъ нихъ, напр: AN, перенеси линею a, Fig. 62.

на AM линею b, потомъ на BN линею c, такъ чтобъ было $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$. Чрезъ точку D линеѣ CB проведи параллельную линею ED: линея CE будетъ четвертая пропорціональная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линея ED параллельна линеѣ BC; то будетъ $AB : AC = BD : CE$, то есть $a : b = c : CE$ (§ 134) и $CE = \frac{bc}{a}$.

Слѣдствіе 1.

137) Ежели будетъ $AC = BD$, тогда CE будетъ двумъ линеямъ третья пропорціональная, $CE = \frac{bb}{a}$.

Слѣдствіе 2.

138) Подобнымъ образомъ къ данной линеѣ найдется другая, которая бы была въ содержаніи сложенномъ изъ двухъ, трехъ, четырехъ и болѣе содержаній. Пусть будетъ данная линея L, и даныя содержанія $a : b$, $c : d$, $e : f$, $g : h$; здѣлай по § 136.

$$a : b = L : M$$
$$c : d = M : N$$
$$e : f = N : O$$

то

то будетъ содержанїе линеи L къ линеѣ N, сложенное изъ содержанїй a:b и c:d, и содержанїе линеи L къ линеѣ O, сложенное изъ содержанїй a:b, c:d, e:f Тожъ должно разумѣть и о большемъ числѣ содержанїй.

ЗАДАЧА 14.

139) *Данную линею AB раздѣлить въ такомъ содержанїи, какъ раздѣлена другая CD въ точкахъ E и F.* Fig. 63.

РѢШЕНIЕ.

Возми по произволенїю какой нибудь уголъ, и на продолженные его бока перенеси линеи AB и CD: концы линей B и D соедини прямою линеею, и по точкамъ E и F проведи параллельныя линеи Ee и Ff линеѣ BD; линея AB такъ раздѣлена будетъ, какъ и линея BD

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Справедливость сего рѣшенїя явствуетъ изъ § 134.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 21.

140) *фигуры* плоскія прямолинейныя *подобными* [similes] называются, ежели всѣ углы одной фигуры равны будутъ угламъ другой, и бока равные углы заключающіе будутъ пропорціональны. Такъ напримѣръ, ежели въ фигурахъ ABCDE и abcde будетъ
Fig. 64.
$A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, и $AB : ab = BC : bc$, $BC : bc = CD : cd$ и проч: то есть ежели бы было $ab = \frac{1}{3} AB$, $bc = \frac{1}{3} BC$, и тожъ бы свойство и прочіе бока во одинакомъ положеніи находящіеся имѣли, то фигуры ABCDE и abcde будутъ подобны.

Слѣдствіе.

141) Слѣдовательно всѣ фигуры регулярныя, которыя одинакое число боковъ имѣютъ, суть подобны между собою, то есть всѣ треугольники равносторонные, всѣ квадраты, всѣ пятiугольники регулярные. По сему и всѣ круги будутъ подобны между собою.

ТЕОРЕМА 24.

142) *Ежели въ треугольникѣ* ABC *два угла будутъ равны угламъ* *треу-*

треугольника abc, *то есть* A=a, B=b; *то треугольники будутъ подобны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Тотчасъ видно, что и уголъ C равенъ будетъ углу c (§ 70). Изъ точки A на линеѣ AB здѣлай AE=ab, и чрезъ точку E проведи ED параллельную линеѣ CB то будетъ уголъ E равенъ углу B=b. Слѣдовательно треугольникъ AED будетъ равенъ треугольнику abc (§ 45). А понеже AB: AC=AE: AD (§ 134), и AE=ab, AD=ac; то будетъ AB: AC=ab: ac. Тожъ можно доказать и о протчихъ бокахъ треугольниковъ, что углы одного треугольника равны угламъ другаго, и бока равные углы заключающіе суть пропорціональны. Слѣдовательно треугольники ABC и abc суть подобны между собою. Fig. 65.

Слѣдствіе.

143) Ежели въ треугольникѣ которому нибудь боку проведется параллельная линея; то отдѣлится треугольникъ цѣлому подобной, и будетъ AC: CB=AD: DE.

ТЕОРЕ-

ТЕОРЕМА 25.

Fig 65. 144) *Ежели въ треугольникахъ* ABC *и* abc *уголъ которой нибудь, напримѣръ* A, *равенъ будетъ углу* a, *и бока равные углы заключающіе будутъ пропорціональны между собою; то треугольники будутъ подобны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Возми AE=ab, и чрезъ точку E проведи линею DE параллельную линеѣ BC; то будутъ треугольники ABC и AED подобны (§ 143), AB : AC =AE : AD, или AB : AC=ab : AD. Но по положенію AB : AC=ab : ac; слѣдовательно будетъ ac=AD, и треугольникъ ADE равенъ треугольнику abc (§ 42). Изъ сего явствуетъ, что треугольники ABC и abc будутъ подобны между собою.

ТЕОРЕМА 26.

145) *Ежели бока треугольника* ABC *пропорціональны будутъ бокамъ треугольника* abc, *одинакое въ разсужденіи угловъ положеніе имѣющимъ;*

щимъ; то треугольники будутъ подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ежели будетъ AB : AC = ab : ac, возми AE = ab и AD = ac; то будетъ AB : AC = AE : AD. Изъ сего слѣдуетъ, что линея ED параллельна будетъ линеѣ BC (§ 135), и AB : CB = AE : DE (§ 143), или AB : CB = ab : DE. Но положенію AB : CB = ab : cb; слѣдовательно cb = DE, и треугольникъ ACB равенъ треугольнику ADE, и подобенъ треугольнику ACB. acb.

ТЕОРЕМА 27.

146) *Треугольники прямоугольные, въ которыхъ бока уголъ который нибудь изъ острыхъ заключающіе пропорціональны, суть подобны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть въ треугольникахъ прямоугольныхъ ABC и abc будетъ AC : AB = ae : ab. Возми AE = ae, и изъ точки E проведи перпендикулярную ED къ линеѣ AB, которая будетъ параллельна Fig. 66.

линеѣ

линеѣ CB, и треугольникъ ACB подобенъ треугольнику AEB (§ 143). Изъ сего слѣдуетъ AC : AB = AE : AD, или AC : AB = ac : AD. Но по положенію AC : AB = ac : ab; слѣдовательно AD = ab, треугольникъ acb равенъ треугольнику AED, и подобенъ треугольнику ACB.

Примѣчаніе.

147) Изъ сихъ теоремъ вообще видно, что треугольники подобны бываютъ, когда ихъ углы равны будутъ, а бока равные углы заключающіе пропорціональны, и притомъ, что дано быть должно, чтобъ данному треугольнику подобной написать можно было.

ТЕОРЕМА 28.

Fig. 67. 148) *Ежели фигура* ABCDE *изъ угла котораго нибудь, напримѣръ A. проведенными къ прочимъ угламъ прямыми линеями раздѣлится на треугольники, и тожъ учинено будетъ въ подобной фигурѣ* abcde *изъ угла* a *одинакое положеніе въ разсужденіи своей фигуры имѣющаго съ угломъ* A *въ фигурѣ* ABCDE; *то фигура* abcde *раздѣлится на треугольники*

ники подобные треугольникамъ фигуры ABCDE.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угловъ A и a къ угламъ D и C, d и c проведи прямыя линеи. Понеже фигуры ABCDE и abcde суть подобны между собою; то будетъ уголъ E = углу e и AE : ae = ED : ed; треугольникъ AED будетъ подобенъ треугольнику aed (§ 144), и ED : ed = AD : ad. Но ED : ed = DC : dc; слѣдовательно и AD : ad = DC : dc. A понеже уголъ ADE равенъ углу ade, уголъ EDC равенъ углу edc; то и уголъ ADC будетъ равенъ углу adc (§ 40 Ариѳм.). Слѣдовательно треугольникъ ADC подобенъ треугольнику adc. Доказательство продолжается, ежели болѣе будетъ треугольниковъ, такимъ же образомъ. Напослѣдокъ и треугольникъ ABC будетъ подобенъ треугольнику abc.

Примѣчаніе.

149) Всякая фигура дїагональными линеями раздѣлена быть можетъ на треугольники, и по сему на данной линеѣ ab фигурѣ ABCDE подобную описать можно,

сово-

совокупляя треугольники подобные треугольникамъ фигуры ABCDE. Но понеже данная фигура различными образы на треугольники раздѣлена быть можетъ, и данныя вещи въ фигурѣ ABCDE могутъ быть различны, разные изъ того произойдутъ способы данной фигурѣ описать подобную, которые сколько изчислять безполезно, столько напротивъ того, ежели два или три показаны будутъ, изъ сихъ основанiй легко рѣшишь можно. 1 *случай*) Пусть въ данной фигурѣ ABCDE всѣ бока и дiагональныя даны будутъ, и положимъ, что данная фигура abcde уже написана; то для подобiя ихъ, ежели изъ точекъ ихъ A и a проведены будутъ дiагональныя линеи къ угламъ фигуръ, треугольники, на которые раздѣлятся, должны быть подобны, и для того изъ данныхъ боковъ фигуры ABCDE съ ея дiагональными, и боку ab прочiе бока искомой фигуры найдутся слѣдующимъ образомъ:

$$AB : ab = CB : cb ; \; cb = \frac{CB . ab}{AB}$$

$$AB : ab = CA : ca ; \; ca = \frac{CA . ab}{AB}$$

$$AB : ab = CD : cd ; \; cd = \frac{CD . ab}{AB}$$

$$AB : ab = AD : ad ; \; ad = \frac{AD . ab}{AB}$$

$$AB : ab = ED : ed ; \; ed = \frac{ED . ab}{AB}$$

$$AB : ab = AE : ae ; \; ae = \frac{AE . ab}{AB}.$$

Такимъ

Такимъ образомъ нашедъ всѣ бока и діагональныя искомой фигуры, ничего больше не требуется, какъ изъ данныхъ трехъ боковъ дѣлать треугольники.

2 *Случай*) ежели всѣ бока фигуры ABCDE, и углы ея даны будутъ, то на линеѣ ab подобная фигура опишется слѣдующимъ образомъ. Понеже фигуры должны быть подобны, то должно быть.

$$AB : ab = CB : cb ; \; cb = \frac{CB . ab}{AB} ;$$

къ линеѣ ab подъ угломъ abc = ABC надлежитъ поставить $bc = \frac{CB . ab}{AB}$

$$AB : ab = DC : dc ; \; dc = \frac{DC . ab}{AB} ;$$

къ линеѣ cb подъ угломъ dcb = DCB поставь линею $dc = \frac{DC . ab}{AB}$

$$AB : ab = ED : ed ; \; ed = \frac{ED . ab}{AB} ;$$

къ линеѣ ed подъ угломъ edc = EDC поставь линею $ed = \frac{ED . ab}{AB}$. Напослѣдокъ концы a и e соедини линеею ea, фигура abcde будетъ подобна фигурѣ ABCDE.

3 *Случай*) Ежели изъ точки G внѣ Fig
или внутрь фигуры взятой проведенныя ли- *68.*,
неи къ угламъ фигуры даны будутъ, такъ *69.*
какъ и углы около точки G находящіеся, и дана будетъ линея въ искомой фигурѣ ag,

 кото-

которая такожъ положенїе въ своей фигурѣ имѣть должна, какое AG имѣетъ въ фигурѣ ABCDEF, или содержанїе оныхъ AG: ag = N: n, то подобная фигура опишется, какъ слѣдуетъ. Около точки g здѣлай уголъ fga = FGA, agb = AGB; bgc = BGC; cgd = CGD; egd = EGD; fge = FGE, отъ линей изъ точки g подъ помянутыми углами проведенныхъ отрѣжь $bg = \frac{n.BG}{N}$; $gc = \frac{n.GC}{N}$; $gd = \frac{nGD}{N}$; $ge = \frac{n.GE}{N}$; $gf = \frac{n.GE}{N}$. Потомъ точки a, b, c, d, e, f соедини надлежащимъ образомъ, фигура abcdef будетъ подобна фигурѣ ABCDEF.

ТЕОРЕМА 29.

150) *Подобныхъ фигуръ окружности, или части ихъ, одинакое въ разсужденїи угловъ положенїе имѣющїя, содержатся между собою такъ, какъ и бока ихъ между равными углами находящїеся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 70. Пусть подобныя фигуры будутъ ABCD и abcd. Понеже содержанїе боковъ въ подобныхъ фигурахъ между равными углами положенныхъ есть одинако, пусть оно будетъ N : n, и произойдетъ

AB:

$$AB : ab = N : n$$
$$BC : bc = N : n$$
$$CD : cd = N : n$$
$AD : ad = N : n$; слѣдовательно
$$AB+BC : ab+bc = N : n$$
$$AB+BC+CD : ab+bc+cd = N : n$$
$AB+BC+CD+AD : ab+bc+cd+ad = N : n$ (§ (85 Ариѳм.).

Слѣдствïе 1.

151) Пусть будутъ два круга ABD и abd, радïусъ круга ABD = R, а круга abd = r. Опиши во всякомъ по полигону регулярному, безчисленное множество боковъ имѣющему, и какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ пусть будетъ число боковъ = M, бокъ перьваго AB = N, и бокъ втораго ab = n. Ежели изъ центровъ оныхъ къ концамъ боковъ проведены будутъ линеи, то будутъ углы при центрахъ, такъ какъ и углы полигоновъ, равны между собою, и MN : Mn = N : n (§ 141. 150) Для подобïя треугольниковъ ABC и abc, N : n = R : r, слѣдовательно MN : Mn = R : r. Но MN и Mn означаютъ окружности круговъ, слѣдовательно окружности круговъ содержатся между собою такъ, какъ радïусы, или цѣлые поперешники. Fig. 71.

Слѣдствїе 2.

152) Ежели будетъ уголъ DCE = углу dce, то будетъ дуга DE въ такомъ содержанїи къ дугѣ ed, какъ содержится радїусъ CD къ радїусу cd.

Примѣчанїе.

153) Понеже всѣ круги суть подобны между собою, и окружности ихъ содержатся между собою такъ, какъ ихъ поперешники, слѣдовательно ежели содержанїе поперешника къ окружности въ одномъ будетъ извѣстно, и данъ будетъ поперешникъ другаго круга, то окружность его по тройному правилу найти можно. Пусть содержанїе поперешника къ окружности будетъ $\delta : \pi$, и данной дїаметръ d; окружность его будетъ $= \frac{\pi d}{\delta}$: а ежели окружность p, то поперешникъ будетъ $= \frac{\delta p}{\pi} = d$.

ТЕОРЕМА 30.

Fig. 72. 154) *Углы BAC и EAD содержатся между собою, такъ какъ дуги изъ верьхопъ ихъ между боками одинакимъ разтворенїемъ циркула описанныя.*

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ описанныя дуги BE и ED; надлежитъ доказать, что CAD : BAC = ED : EB. Раздѣли дугу BD на нѣсколько равныхъ частей, и къ точкамъ, въ которыхъ она раздѣлена будетъ, изъ A проведи прямыя линеи, которыми уголъ на столько равныхъ частей раздѣлится, на сколько дуга BD раздѣлена будетъ (§ 92). Изъ линей, уголъ BAD дѣлящихъ, или упадетъ которая нибудь на линею AC, или ни одна не упадетъ. Ежели упадетъ, то столько частей дуги BD содержаться будетъ въ дугѣ BE, сколько частей угла BAD содержится въ углѣ BAC. Изъ сего слѣдуетъ, что будетъ

BAD : BAC = BED : BE (§ 78 Ариѳм.) и BAD − BAC : BAC = BED − BE : BE, (§ 83 Ариѳм.) т. е. CAD : BAC = ED : BE

А хотя линея AC и не упадетъ ни на одну изъ тѣхъ линей, которыя уголъ BAD раздѣляютъ на равныя части, однакожъ само собою видно, что не можетъ ни больше, ни меньше въ дугѣ BE быть такихъ частей, на какія BE раздѣлена, какъ въ углѣ BAC частей

угла BAD Слѣдовательно и въ семъ случаѣ помянутая пропорцїя будетъ имѣть мѣсто.

Слѣдствїе.

155) И такъ всякой уголъ къ прямому содержится, такъ какъ дуга, между боками его описанная, къ четверти круга, тѣмъ же разтворенїемъ описанной, а къ двумъ прямымъ вмѣстѣ взятымъ, такъ какъ та же дуга къ половинѣ окружности. Такимъ образомъ по содержанїю дуги къ полуокружности, или къ четверти окружности, всѣ углы могутъ быть извѣстны.
Fig. 5. И понеже дуга em содержится къ своей полуокружности aeb, такъ какъ дуга EM къ полуокружности AEB. Слѣдовательно всякая дуга между боками угла, изъ верьху его описанная, можетъ быть мѣрою угла.

Примѣчанїе.

156) Теперь видно, для чего дуга изъ верьху угла между боками описанная мѣрою его называется. Описавши дугу найти можно содержанїе оной къ четверти или половинѣ окружности дѣленїемъ обѣихъ на равныя и маленькїя частицы. Какъ скоро содержанїе ихъ будетъ извѣстно, то и величина угла будетъ извѣстна. Изъ сего явствуетъ, что здѣсь мѣра не въ такомъ

смыслѣ

смыслѣ берется какъ обыкновенно, то есть, чтобъ мѣра нѣсколько разъ взятая равна, была мѣряемому количеству.

ТЕОРЕМА 31.

157) *Ежели изъ точки A внѣ круга взятой протянуты будутъ линеи AD и AE, такъ чтобъ каждая окружность въ двухъ точкахъ перерѣзывала; то будетъ AC : AB = AD : AE. 2) Ежели точка A будетъ внутрь круга и чрезъ оную проведутся прямыя линеи BD и CE, которыя бы окружность перерѣзывали, то будетъ также AC : AB = AD : AE.* Fig. 73. Fig 74.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи линеи BC и DE, такимъ образомъ произойдутъ два треугольника ABC и AED подобные, потому что BDE + BCE = 2R, и DBC + CED = 2R (§ 111) притомъ ACB + BCE = 2R и DBC + ABC = 2R (§ 20). Изъ сего слѣдуетъ, что BDE = ACB, и CED = ABC, и треугольникъ ABC подобенъ треугольнику ADE (§ 142) Слѣдовательно AC : AB = AD : AE.

2) Уголъ DBC равенъ будетъ углу CED, потому что стоятъ на одной дугѣ, уголъ BDE равенъ углу BCE для подобной причины; слѣдовательно треугольникъ ABC подобенъ треугольнику AED, и будетъ AC : AB = AD : AE.

Слѣдствїе 1.

Fig. 75. 158) Ежели линея AD будетъ касательная, то есть когда точки B и D сольются, то будетъ AB = AD, и AD : AB = AB : AE, слѣдовательно AB будетъ средняя пропорцїональная между AC и AE.

Слѣдствїе 2.

Fig. 76. 159) Ежели линея CE пересѣчетъ линею BD на двѣ равныя части, то будетъ AB = AD, и линея AB = AD будетъ средняя пропорцїональная между CA и AE.

ЗАДАЧА 15.

160) *Между данными двумя линеями найти среднюю пропорцїональную.*

РѢШЕНІЕ.

Fig. 77. Пусть данныя линеи будутъ M и N; соедини ихъ такъ, чтобъ составляли

ляли прямую линею AC, на которой опиши полукружїе, изъ точки B, гдѣ данныя линеи соединяются, возвысь перпендикулярную BD, которая будетъ искомая средняя пропорцїональная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведи линеи AD и DC, то будетъ уголъ ADC прямой (§ 111), такъ какъ и углы ADB и DBC. Сверьхъ сего треугольникамъ прямоугольнымъ ADC и ADB уголъ A обѣимъ общей, слѣдовотельно треугольникъ ADC подобенъ треугольнику ADB (§ 142) Для подобной причины и треугольникъ BDC подобенъ треугольнику ADC, изъ сего слѣдуетъ, что и треугольники ABD и CBD суть подобны между собою, и будетъ

$$AB : BD = BD : BC.$$

Слѣдствїе 1.

161) Понеже треугольникъ ADC подобенъ треугольникамъ BDC и ADB, то будетъ BC : DC = DC : AC и AB : AD = AD : AC, слѣдовательно DC будетъ средняя пропорцїональная между линеями BC и AC, а

AD средняя пропорціональная между AB и AC.

Слѣдствіе 2.

162) Ежели въ треугольникѣ прямоугольномъ, изъ прямаго угла на бокъ ему противолежащей, опустится перпендикулярная линея, то ею треугольникъ раздѣлится на два и между собою и цѣлому подобные.

ГЛАВА 4.

О СРАВНЕНИИ И РАЗМѢРЕНИИ ФИГУРЪ.

ТЕОРЕМА 32.

163) *Параллелограммы между параллельными линеями на томъ же основаніи или равныхъ стоящіе, суть равны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

fig. 8. Пусть будутъ параллелограммы ABCD и ABFE между параллельными линеями MN и CP на основаніи AB стоящіе. Понеже линея AC = линеѣ BD, и AE = BF. Сверьхъ сего CD = AB = EF

=EF (§ 128), то будетъ CE=DF, слѣдовательно треугольникъ AEC= треугольнику BDF (§ 48). Изъ равныхъ треугольниковъ ACE и BDF отними треугольникъ GDE, то остатокъ ACGD будетъ равенъ остатку BGEF. Ко всякому изъ остатковъ придай треугольникъ AGB, то будетъ ACGD+AGB=ACDB=BGEF+AGB= ABFE (§ 40 Ариѳм.).

Слѣдствіе 1.

164) Когда цѣлые параллелограммы равны между собою, то и половины ихъ будутъ равны, то есть треугольники ACB и AEB на одномъ или равныхъ основаніяхъ и между параллельными линеями стоящіе, суть равны между собою.

Слѣдствіе 2.

165) Понеже ACB=$\frac{1}{2}$ACDB=AEB. Fig.
Возми AB=BF, то будетъ AEB=BEF 79.
(§ 164). Слѣдовательно ACDB=AEF, то есть треугольникъ которой между тѣмижъ параллельными стоитъ, и вдвое большее основаніе имѣетъ, есть равенъ параллелограмму.

Слѣд-

Слѣдствїе 3.

Fig. 30. 166) Ежели между тѣмижъ параллельными линеями будетъ стоять много треугольниковъ, какъ въ фигурѣ изображается, то треугольникъ ABG, котораго основанїе равно всѣмъ основанїямъ треугольниковъ ABC, CDE, EFG вмѣстѣ взятымъ, равенъ будетъ суммѣ треугольниковъ ABC, CDE, EFG.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ.

Fig. 30. 167) Разстоянїе между параллельными линеями, называется *пысота* (Altitudo) фигуръ между ими содержащихся. Такъ напримѣръ AM будетъ высота треугольниковъ ABC, ACG, CDE, EFG, и четвероугольниковъ ABCD, DEFG, а *оснопанїе* (Basis) фигуры, бокъ которой нибудь сходствующей съ параллельною линеею.

ЗАДАЧА 16.

168) *Данному параллелограмму здѣлать другой раиной подъ даннымъ угломъ.*

РѢШЕНІЕ.

Fig. 31. Пусть будетъ данной параллелограммъ ABCD, и уголъ, подъ которымъ

рымъ другой равной здѣлать надлежитъ O. Продолжи основанiе BC и бокъ ему противолежащей AD, уголъ EFG здѣлай $=$O, потóмъ возми FG $=$BC, изъ точки G линеѣ FE проведи параллельную линею GH. Такимъ образомъ будетъ параллелограммъ ABCD $=$ паралл: EFGH (§ 163).

Слѣдствiе.

169) По сему и треугольнику другой равной подъ даннымъ угломъ написать можно. Ежели бы данной треугольникъ былъ ABC, и уголъ O, то здѣлавъ EFG$=$O, и BC$=$FG, надлежитъ только соединить точки E и G линею EG, и произойдетъ треугольникъ искомой EFG.

Примѣчанiе.

170) Изъ § 156 и изъ сего рѣшенiя видно, какъ параллелограмму равной треугольникъ подъ даннымъ угломъ написать можно.

ТЕОРЕМА 33.

171) *Параллелограммы одинакой высоты содержатся между собою такъ какъ ихъ основанiя.*

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig 82. Пусть будутъ параллелограммы ABCD и EFGH одинакой высоты, здѣлай BL=FG, и будетъ паралл: AL равенъ паралл: EG. Раздѣли основанїе BC на сколько нибудь равныхъ частей, то въ паралл: ABCD столько содержаться будетъ равныхъ между собою параллелограммовъ, на сколько частей основанїе раздѣлено будетъ, и ежели точка L упадетъ на которую нибудь точку дѣленїя, то въ параллелограммѣ AL столько будетъ равныхъ прежнимъ параллелограммовъ, на сколько частей BL раздѣлена будетъ. Слѣдовательно

ABCD : ABLK = BC : BL или
ABCD : EFGH = BC : FG. (§ 83 Ариѳм.)

А хотя точка L и не упадетъ ни на одну точку дѣленїя, однакожъ не можетъ быть, чтобъ больше или меньше частей, на сколько BC раздѣлена, содержалось въ линеѣ BL, какъ сколько частей параллелограмма ABCD содержится въ паралл: AL. Слѣдовательно и въ семъ случаѣ будетъ

ABCD : EFGH = BC : FG.

Слѣд-

Слѣдствiе 1.

172) Ежели въ параллелограммахъ ABCD и GHIK основанiя CD и HK будутъ равны между собою. На основанiи CD здѣлай четвер: прямоугольной ED, равной параллелограмму AD, и на основанiи HK ректангулъ LK равной параллелограмму GK. Понеже бока прямоугольниковъ CD и HK взяты могутъ быть за высоты, а EC и LH за основанiя (§ 167), для сей причины будетъ Fig. 83.

ECDF : LHKM = EC : HL (§ 171) или
ABCD : GHIK = EC : HL

т. е. параллелограммы равное основанiе имѣющiе содержатся между собою такъ какъ ихъ высоты.

Слѣдствiе 2.

173) Понеже всякой треугольникъ есть равенъ половинѣ параллелограмма, тожъ основанiе и высоту имѣющаго; слѣдовательно, что здѣсь доказано о параллелограммахъ, тожъ должно разумѣть и о треугольникахъ: что треугольники ABC и DEF содержатся между собою такъ, какъ ихъ основанiя BC и EF, а треугольники ABC и abc равныя основанiя имѣющiе содержатся между собою такъ какъ высоты CD и cd. Fig. 84. Fig. 85.

TE-

ТЕОРЕМА 34.

Fig. 86. 174) *Параллелограммы* ABCD *и* abcd *или треугольники* ABD *и* abd ~~*равныя основанія*~~ *имѣющіе суть между собою въ содержаніи сложенномъ изъ содержаній* BE : be *и* AD : ad, *то есть*

ABCD : abcd = EB. AD : eb. ad.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Здѣлай третей прямоугольникъ FG, въ которомъ бы высота FG равна была высотѣ BE, а основаніе GI равно основанію ad, то будетъ

ABCD : FGHI = AD : ad (§ 171)
FGHI : abcd = BE : be (§ 172) слѣдоват:
ABCD : abcd = BE. AD : be. ad. (§ 87. ариѳм.) и
$\frac{1}{2}$ABCD : $\frac{1}{2}$abcd = BE. AD : be. ad.

Слѣдствіе 1.

175) Ежели будетъ ABCD = abcd, то будетъ AD. BE = ad. be. Слѣдовательно AD : ad = be : BE, т. е. когда высота одного параллелограммма, или треугольника содержатся будетъ къ высотѣ другаго, такъ какъ основаніе послѣдняго къ основанію перьваго,

ваго, тогда параллелограммы или треугольники будутъ равны между собою.

Слѣдствіе 2.

176) Ежели въ параллелограммахъ или треугольникахъ будетъ AD : BE = ad : be, или AD : ad = BE : be; то параллелограммы или треугольники будутъ между собою въ содержаніи удвоенномъ высотъ или основаній, такъ какъ всѣ квадраты.

Примѣчаніе.

177) Ежели высота и основанія изображены будутъ числами, то и содержаніе параллелограммовъ или треугольниковъ изобразить можно будетъ въ числахъ. Напримѣръ, ежелибы было AD = 5, BE = 4, ad = 3, be = 2; то произойдетъ ABCD : abcd = 20 : 6. Тожъ должно разумѣть и о треугольникахъ.

ЗАДАЧА 17.

178) *Прямолинейную какую нибудь плоскость вымѣрять.*

РѢШЕНІЕ.

Понеже мѣра съ мѣряемою величиною должна быть одинакаго роду, и

мѣрять не что иное есть, какъ находить содержанїе мѣры къ мѣряемой величинѣ, или сколько разъ мѣра въ продолженной величинѣ содержится; то явствуетъ, что въ семъ случаѣ за мѣру надлежитъ взять какую нибудь площадь, напримѣръ квадратъ, котораго бокъ AB или AD есть обыкновенно употребляемая мѣра. Взявши сей бокъ за единицу, надлежитъ искать содержанїе предложенной фигуры къ квадрату за мѣру взятому. Пусть данная плоскость будетъ параллелограммъ AC, и мѣра квадратъ EG. Пусть число единицъ, какова есть EF или EH, въ бокѣ AB содержащихся будетъ $= a$, и въ бокѣ $AD = b$; то будетъ (§ 174)

Fig. 87.

$$EFGH : ABCD = 1 : ab.$$

Слѣдовательно въ параллелограммѣ AC число единицъ квадратныхъ EG будетъ $= ab$. По сему площадь параллелограмма найдется, ежели основанїе на высоту умножится.

Слѣдствїе 1.

179) Треугольникъ равенъ половинѣ параллелограмма, тожъ основанїе и высоту

съ

съ треугольчикомъ имѣющаго (§ 165). Но площадь параллелограмма, ежели высота его будетъ $=a$, а основанiе $=b$, есть $=ab$; слѣдовательно площадь треугольника будетъ $=\frac{ab}{2}$.

Слѣдствiе 2.

180) Всякой четвероугольникъ можетъ раздѣленъ быть дiагональною на два треугольника: слѣдовательно площадь его найдется, ежели площади треугольниковъ въ одну сумму сложены будутъ. Пусть будетъ четвероугольникъ ABCD: проведи дiагольную AD, которою четвероугольникъ ABCD раздѣленъ будетъ на два треугольника ABD и ACD. Изъ точекъ B и C къ дiагональной, за основанiе взятой, проведи перпендикулярныя BF и CE. Пусть будетъ $AD=d$, $BF=a$, $CE=c$; площадь четвероугольника ABCD будетъ $=\frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}dc=\frac{1}{2}d(a+c)$. Fig. 88.

Слѣдствiе 3.

181) Ежели въ четвероугольникѣ два противолежащiе бока будутъ между собою параллельны, то высота, на которые четвероугольникъ дiагональною раздѣленъ, будетъ разстоянiе между параллельными, а основанiя ихъ бока параллельные. Пусть будетъ $AB=b$, $CD=c$, $BE=a$, Fig. 89.

 то

то площадь четвер: ABCD будетъ $=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac$ $=\frac{1}{2}a(b+c)$.

Слѣдствіе 4.

182) Понеже всякая фигура на треугольники раздѣлена быть можетъ; то изъ сего явствуетъ, коимъ образомъ данной фигуры площадь найти можно.

Примѣчаніе.

183) Когда бокъ квадрата AB за
Fig. мѣру принятаго раздѣлится на десять рав-
90. ныхъ частей, и будетъ $AE=\frac{1}{10}AB$; то AF будетъ десятая часть квадрата AD. Ежели притомъ будетъ $AG=\frac{1}{10}AC$; то AH будетъ десятая часть паралл: AF, или сотая часть квадрата AD. Ежели подобное дѣленіе боковъ AE и AG далѣе продолжено будетъ; то найдется десятая и сотая часть квадрата AH, то есть тысящная, десятитысящная часть квадрата AD, и такъ далѣе. По сему квадратной футъ содержитъ въ себѣ сто квадратныхъ дюймовъ, и дюймъ квадратной сто линей квадратныхъ, ежели футъ раздѣляется на 10 дюймовъ, и дюймъ на 10 линей. А ежели футъ раздѣляется на 12 дюймовъ, а дюймъ на 12 линей; то футъ квадратной будетъ въ себѣ содержать 144 линеи квадратныхъ. Изъ сего явствуетъ, коимъ образомъ въ числѣ площадь изображающемъ

ющемъ отдѣлять должно числа футы, дюймы, линеи и проч: означающія. Такъ напримѣръ въ параллелограммѣ ABCD, пусть будетъ AB = 146''', BC = 104'''. Площадь сего параллелограмма будетъ AB×BC = 15184''' квадратныхъ, или 1', 51'', 84''', ежели десятичное дѣленіе мѣры принято будетъ, а въ другомъ случаѣ 105'', 64'''.

ЗАДАЧА 18.

184) *Фигурѣ плоской прямолинейной болѣе, нежели три бока, имѣющей написать другую равную, въ которой бы число боковъ однимъ было меньше противъ прежней.*

РѢШЕНІЕ.

Пусть будетъ фигура ABCDEFA. Fig. 91.
Отдѣли отъ нея которой нибудь треугольникъ ABF, бокъ фигуры FE продолжи далѣе такъ, чтобъ EG была прямая линея, чрезъ точку A проведи параллельную линеѣ BF, и продолжи до тѣхъ поръ, пока не пересѣчетъ линею GE, Наконецъ точки B и G соедини линеею BG, будетъ искомая фигура GBCDEFG.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже линея AG параллельна линеѣ BF, треугольникъ ABF будетъ равенъ треугольнику BGF. (§ 164.) Слѣдовательно фигура BCEDC равна фигурѣ ABCDEF, а число боковъ въ ней находящихся будетъ однимъ меньше, нежели въ фигурѣ AD, потому что вмѣсто боковъ AB, AF и FE здѣлались только два BG и GE.

Слѣдствїе.

185) По сему уменьшая число боковъ напослѣдокъ данной фигурѣ найдется равной треугольникъ.

ТЕОРЕМА 35.

186) *Всякая фигура регулярная равна треугольнику, котораго основанїе равно суммѣ боковъ фигуры или ея окружности, а высота треугольника радїусу круга въ фигурѣ описаннаго.*

Fig. 92.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ фигура регулярная ABCFED, и C центръ круга въ ней напи-

написаннаго. Изъ C къ угламъ фигуры проведи прямыя линеи : такимъ образомъ фигура раздѣлится на столько равныхъ между собою треугольниковъ, сколько въ ней боковъ находится, потому что основанія ихъ будутъ бока фигуры, а высота всякаго перпендикулъ изъ центра къ боку проведенной, то есть радїусъ круга въ фигурѣ написаннаго (§ 119). Слѣдовательно сумма всѣхъ треугольниковъ равна будетъ одному eCe, котораго основанїе εε ee=AB+BF+FE+ED+DA, а высота радїусъ Ca, и треугольникъ eCe равенъ цѣлой фигурѣ ABFED.

Слѣдствїе 1.

187) Понеже кругъ тѣмъ меньше отъ фигуры регулярной въ немъ написанной разнится, чѣмъ больше боковъ фигура имѣть будетъ, и разность напослѣдокъ изчезаетъ, ежели число боковъ будетъ безконечно, такъ что полигона регулярнаго окружность равна будетъ окружности круга. Слѣдовательно и площадь круга равна будетъ треугольнику, котораго основанїе окружность круга, а высота его радїусъ.

Слѣдствiе 2.

188) Подобнымъ образомъ секторъ круга равенъ треугольнику, котораго основанiе равно дугѣ сектора, а высота радiусу.

Примѣчанiе.

189) Чтобъ найти площадь круга, надлежитъ сперьва найти прямую линею, которая бы равна, была окружности. Пусть дiаметръ, котораго площадь ищется, будетъ $=a$, окружность его будетъ $=\frac{\pi a}{\delta}$ (§ 153) и площадь сего круга $=\frac{\pi aa}{4\delta}$, а площадь сектора, котораго дуга къ своей окружности содержится такъ какъ $1:n$, будетъ $=\frac{\pi aa}{4\delta n}$. Но не имѣемъ еще способа Геометрическаго находить прямую линею равную окружности, или содержанiя дiаметра къ своей окружности, которое входитъ въ изображенiе окружности, и площади круга. И такъ довольствоваться должно содержанiями, которыя отъ истиннаго не много разнятся, каковы суть слѣдующiя; $\delta:\pi=7:22$, или $=100:314$, или $=113:355$, изъ которыхъ аккуратнѣйшее есть послѣднее и называется *Мецiепо*. По которому площадь круга, котораго поперешникъ $=a$, будетъ $=\frac{355aa}{452}$, то есть какъ 452 къ 353 такъ квадратъ дiаметра данна-

даннаго круга къ площади круга, а площадь сектора $= \frac{355 naa}{452}$. $\frac{355 naa}{412}$

190) Какъ изъ даннаго содержанія поперешника къ окружности можно опредѣлить всякаго круга площадь, котораго діаметръ извѣстенъ; такъ изъ данной площади можно найти его поперешникъ и окружность. Пусть площадь круга будетъ $= A$, то бы было $A = \frac{\pi aa}{4\delta}$, діаметръ его будетъ $a = \sqrt{\frac{4\delta A}{\pi}}$, и окружность $= \sqrt{\frac{4\pi A}{\delta}}$. Изъ сего явствуетъ, что всѣ задачи до круга касающіяся зависятъ отъ содержанія поперешника къ окружности, которое Г. Мецій находитъ, полагая, что окружность круга равна діаметру трижды взятому $+\frac{1}{7}$ діаметра $-\frac{1}{113}$ седьмой части діаметра, то есть $\delta : \pi = 1 : 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} = 1 : \frac{355}{113} = 113 : 355 = 10000000 : 31415929$.

ТЕОРЕМА 36.

191) *Треугольники подобные содержатся между собою такъ, какъ квадраты бокопъ равнымъ угламъ противполежащихъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ подобные треугольники ABC и abc: къ основаніямъ AB и ab Fig. 93.

 про-

(1) Четыремъ частямъ ... діаметра ... $= \sqrt{\pi\delta A}$ ... $\sqrt{\pi A}$ ...

проведи перпендикулярныя линеи CD и cd, то будутъ треугольники ACD, и acd такъ, какъ и треугольники CDB и cdb подобны между собою; и для того будетъ AD : ad = DC : dc и DB : db = DC : dc. Слѣдовательно AD+DB : ad+db = DC : dc (§ 85 Ариѳм.), то есть AB : ab = DC : dc откуда произойдетъ $dc = \frac{ab.DC}{AB}$. Но ABC : abc = AB.BC : ab.dc (§ 174): поставь вмѣсто $dc = \frac{ab.DC}{AB}$, и будетъ ABC : abc = $AB^2 : ab^2$. Изъ сего явствуетъ, что треугольники подобные суть между собою такъ, какъ квадраты основанїй, или понеже всякой бокъ можетъ взятъ быть за основанїе, какъ квадраты боковъ равнымъ угламъ противолежащихъ.

Слѣдствїе 1.

192) Ежели въ пропорцїи ABC : abc = AB.DC : ab.dc вмѣсто ab поставишь $\frac{AB.dc}{DC}$, то произойдетъ ABC : abc = $DC^2 : dc^2$, то есть подобные треугольники содержатся между собою такъ, какъ квадраты ихъ высотъ.

Слѣдствїе 2.

193) Понеже фигуры подобныя могутъ быть раздѣлены на треугольники подобные,

добные, и по сему фигура ABCDE будетъ содержаться къ фигурѣ abcde такъ, какъ AB^2 : ab^2, или DB^2 : db^2, потому что ежели обѣ фигуры раздѣлены будутъ на треугольники, то всякой треугольникъ фигуры ABCDE будетъ содержаться къ подобному треугольнику фигуры abcde такъ, какъ квадратъ котораго нибудь бока фигуры ABCDE къ квадрату бока одинакое положенiе съ прежнимъ имѣющаго фигуры abcde. Изъ сего слѣдуетъ, что и сумма всѣхъ треугольниковъ фигуры ABCDE къ суммѣ треугольниковъ фигуры abcde будетъ въ такомъ же содержанiи (§ 85 Ариѳм.). Fig. 94.

Слѣдствiе 3.

194) Фигуры регулярныя подобныя содержатся между собою такъ, какъ квадраты радiусовъ круговъ, въ которыхъ написаны, или около описаны быть могутъ.

Слѣдствiе 4.

195) Слѣдовательно круги и секторы подобные содержатся между собою такъ, какъ квадраты дiаметровъ или полупоперешниковъ.

ТЕОРЕМА 37.

196) *Во всякомъ треугольникѣ прямоугольномъ сумма квадратовъ боковъ, уголъ прямой составляющихъ,*

ляющихъ, равна квадрату бока углу прямому противолежащаго.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 95. Пусть будетъ треугольникъ прямоугольной ABC: на бокахъ его здѣлай квадраты ACDE, ABGF и BCH. Изъ точки B къ линеѣ DE проведи перпендикулярную линею BK, а къ точкѣ D линею BD: изъ точки C къ точкѣ F проведи линею CF, такимъ образомъ произойдутъ два треугольника ABD и AFC, въ которыхъ AF=AB, AC =AD, и уголъ CAF=BAD. Потому что BAF=CAD, то будетъ и BAF+BAC =CAD+BAC (§ 40 Ариѳм:) Слѣдовательно треугольники суть равны между собою. (§ 42) Но треугольникъ FAC съ квадратомъ ABGF стоитъ на одномъ основанiи и между тѣмижъ параллельными, также и треугольникъ ABD съ параллелограммомъ ADKL; и для того AFC=½ABGF, ABD=½ADKL (§ 165). Но AFC=ABD: слѣдовательно ABGF=ADKL. Подобнымъ образомъ докажется ABGF+BCH=ACDE.

Примѣчанiе.

197) Сiе предложенiе можно доказать изъ § 161 слѣдующимъ образомъ. Понеже

же $BC : DC = DC : AC$, и $AB : AD = AD : AC$; Fig.
то будетъ $DC^2 = AC.BC$, $AD^2 = AB.AC$ 77.
и $DC^2 + AD^2 = AC.CB + AC.AB$ или $DC^2 + AD^2 = AC(AB + BC) = AC^2$.

Слѣдствїе 1.

198) Посредствомъ сего предложенїя Fig.
можно найти двумъ, тремъ, и многимъ квад- 96.
ратамъ одинъ равной. Пусть данные квадраты будутъ A, B, C. Къ боку EF квадрата A поставь бокъ квадрата B подъ прямымъ угломъ; то будетъ $EI^2 = A + B$. Потомъ къ боку EI поставь бокъ квадрата C также подъ прямымъ угломъ, и будетъ $EK^2 = A + B + C$. Подобнымъ образомъ многимъ квадратамъ равнымъ или неравнымъ между собою одинъ равной найдется.

Слѣдствїе 2.

199) Когда изъ одного квадрата вычесть надлежитъ другой, или найти ихъ разность; то также помощїю сего предложенїя учинить можно. Пусть будетъ бокъ Fig.
большаго квадрата AB: на немъ какъ на дї- 97.
аметрѣ опиши полукружїе, и съ котораго нибудь конца, напримѣръ A, перенеси на окружность бокъ меньшаго квадрата, которой пусть будетъ AC, бокъ искомаго квадрата будетъ CB, потому что $AB^2 = AC^2 + CB^2$ откуду $AB^2 - AC^2 = CB^2$ (§ 40 Ариѳм.).

Примѣ-

Примѣчанїе.

200) Сія Теорема называется *Пиѳагоровою*, потому что ея изобрѣлъ *Пиѳагоръ*, и бока угол прямой составляющїе назвалъ *Катетами*, (Catheti) а бокъ углу прямому противолежащей *Гипотенузою* (Hypothenusa). По сему Теорема можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ. Въ треугольникѣ прямоугольномъ квадраты Катетовъ равны квадрату Гипотенузы.

ЗАДАЧА 19.

201) *Даннымъ двумъ подобнымъ фигурамъ написать одну объимъ равную и подобную.*

РѢШЕНIЕ.

Fig. 98. Пусть данныя фигуры будутъ ABCD и abcd: возми изъ фигуръ по боку или по дїагональной, которые бы одинакое положенїе имѣли, напримѣръ AB и ab, и ихъ соедини подъ прямымъ угломъ, чтобъ произошелъ треугольникъ EFG, въ которомъ EF=ab и FG=AB. На линеѣ EG здѣлай фигуру GEHI подобную которой нибудь изъ прежнихъ такъ, что бокъ GE такоежъ имѣлъ положенїе въ разсужденїи угловъ фигуры GEHI, какое имѣютъ бока AB

и

и ab въ разсужденіи своихъ фигуръ. Искомая фигура будетъ GEHI.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже $ABCD : abcd = AB^2 : ab^2$ (§ 193), и $ABCD + abcd : abcd = AB^2 + ab^2 : ab^2$ (§ 83 Ар.); то для равенства линей AB и FG, и FE произойдетъ $ABCD + abcd : abcd = GE^2 : ab^2$. Но GEHI подобна фигуръ abcd. Слъдовательно будетъ

$$GEHI : abcd = GE^2 : ab^2 \text{ и}$$
$$GEHI = ABCD + abcd.$$

Примѣчаніе.

202) Изъ рѣшенія предложенной задачи видѣть можно, коимъ образомъ, ежели даны будутъ двѣ подобныя фигуры, можно написать третью, которая бы равна была разности между данными фигурами.

Слѣдствіе 1.

203) По сему двумъ кругамъ можно найти третей равной. Пусть діаметръ одного будетъ $= A$, а другаго $= B$: діаметръ искомаго будетъ $= \sqrt{(AA + BB)}$, или многимъ можно описать одинъ равной. Ежели будетъ

$A=B$, то діаметрЪ искомаго круга будетЪ $=A\sqrt{2}$; а ежели число равныхЪ круговЪ будетЪ $=N$, то діаметрЪ круга, которой имЪ всѢмЪ равенЪ быть долженЪ, будетЪ $=A\sqrt{N}$.

ПримѢчаніе.

204) Хотя цѢлаго круга площади найти не можемЪ; однакожЪ сія Теорема случай подала кЪ нахожденію площадей разныхЪ его частей. Перьвой изобрѢтатель былЪ такой части *ГилократЪ Хійской*, которая отЪ изобрѢтателя и имя получила, и состоитЪ вЪ слѢдующемЪ. ВЪ какомЪ нибудь кругѢ ADBE провесть надлежитЪ два

Fig. 99. поперешника AB и DE, которые бы пересѢкали себя подЪ прямымЪ угломЪ. ИзЪ точки E радіусомЪ AE или $EB=\sqrt{(AC^2+CE^2)}$ $=AC\sqrt{2}$ описать кругЪ GABH. Площадь полукруга GAFBH будетЪ равна площади круга ADBE (§ 203): и понеже уголЪ AEB прямой, секторЪ AEBF будетЪ $=$ полукругу ADBC. Отними какЪ отЪ сектора, такЪ и отЪ полукруга сегментЪ AFBC, и будетЪ треугольникЪ $AEB=ADBFA=AgEG+BhEH$.

205) ИзЪ § 199 видно, что когда на линеѢ AB опишется полукружіе, и изЪ точекЪ A и B кЪ какой нибудь точкѢ на окружности взятой проведены будутЪ линеи AC и BC,

и BC, то сумма полукруговъ описанныхъ на линеяхъ AC и CB равна будетъ полукругу ACB, то есть $ACB = ADC + CEB$, отними съ обѣихъ сторонъ сегменты AFC и CGB, то будетъ треугольникъ $ACB = AFCDA + BGCEB$. Fig. 100

ТЕОРЕМА 38.

206) *Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ боковъ равна суммѣ квадратовъ діагональныхъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ параллелограммъ ABCD, изъ угла A проведи перпендикулярную линею AF, и изъ точки C на предложенную AB перпендикулярную EC, то будетъ $EC = AF$, $CF = AE$. Сверьхъ сего $AD^2 = AF^2 + FD^2$ и $CB^2 = EC^2 + EB^2$ (§ 196); Но $FD^2 = (CD - CF)^2 = CD^2 - 2\,CD \times CF + CF^2$ и $EB^2 = (AB + EA)^2 = AB^2 + 2AB \times EA + EA^2$. Слѣдовательно $AD^2 + CB^2 = AF^2 + CD^2 - 2CD \times CF + CF^2 + EC^2 + AB^2 + 2AB \times AE + AE^2$. Но $AF^2 + CF^2 = AC^2$ и $EC^2 + AE^2 = AC^2 = BD^2$. Изъ сего произойдетъ $AD^2 + CB^2 = CD^2 + AC^2 + AB^2 + BD^2$, или $AD^2 + CB^2 = 2AB^2 + 2AC^2$. Fig. 101

ТЕОРЕМА 39.

Fig. 102 207) *Во всякомъ четвероугольникѣ ABCD, ежели дїагональные AD и BC раздѣлены будутъ на двѣ равныя части въ точкахъ G и F, и проведется линея FG, то будетъ* $AB^2+BD^2+CD^2+AC^2=AD^2+BC^2+4FG^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ точки B чрезъ F проведи линею BL, чтобъ была BF=BL. Потомъ изъ точки D проведи DM параллельную боку AC, и изъ точки B линею BM параллельную линеѣ CL. Сверьхъ сего когда проведутся линеи AM и LM, то произойдутъ параллелограммы ACDM и BCLM, и въ параллелограммѣ ACDM будетъ $2AC^2+2CD^2=AD^2+CM^2$ въ паралл: BCLM будетъ $2BC^2+2CL^2=BL^2+CM^2$ (§ 206). Изъ сего найдется $CM^2=2AC^2+2CD^2-AD^2$ и $CM^2=2BC^2+2CL^2-BL^2$ слѣдовательно

$$2AC^2+2CD^2-AD^2=2BC^2+2CL^2-BL^2 \text{ или}$$
$$2AC^2+2CD^2=2BC^2+2CL^2+AD^2-BL^2$$

Но по свойству параллелограммовъ въ § 206 доказанномъ будетъ еще $2AB^2+2BD^2=AD^2+BL^2$ и $2AC^2+2CD^2+2AB^2+2BD^2=2BC^2$

$^{2}BC^2+{}_2CL^2+{}_2AD^2$ (§ 40 Ариѳм.), а для подобія треугольниковъ BGF и BCL должно быть $BF^2 : BL^2 = GF^2 : CL^2$. Но $BL^2 = {}_4BF^2$, слѣдовательно и $CL^2 = {}_4FG_2$ и $AC^2+CD^2+AB^2+BD^2 = BC^2+AD^2+{}_4FG^2$.

Слѣдствіе.

208) Ежели будетъ $GF = 0$, тогда будетъ ~~AC~~ $= ED$, и $BE = EC$; и произойдетъ $AC^2+CD^2+AB^2+BD^2 = BC^2+AD^2$. AE

ГЛАВА 5.

О ПОЛОЖЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 22.

209) Линея къ плоскости MN *перпендикулярною* [perpendicularis] называется, ежели со всѣми линеями на плоскости MN чрезъ точку B проведенными дѣлаетъ углы прямые, то есть, когда углы ABC, ABF, ABD, ABE будутъ прямые. Fig. 103

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 23.

310) Плоскость PQ къ плоскости MN *перпендикулярною* называет- Fig. 104

ся, когда линеи AB, CD на плоскости PQ проведенныя перпендикулярно къ общему плоскостей разрѣзу PR, будутъ перпендикулярны и къ плоскости MN.

Примѣчаніе.

211) Линея, въ которой плоскости
Fig. 105 взаимно себя пересѣкаютъ, не можетъ быть никакая какъ прямая; потому что ежели положимъ, что линея сѣченія естъ PSR, то должно, чтобъ и плоскость которая нибудь имѣла такуюжъ фигуру, чему въ такомъ случаѣ, когда поверхности MN и PQ берутся за плоскіе, быть не возможно.

ТЕОРЕМА 40.

212) *Ежели линея AB къ двумъ*
Fig. 106 *линеямъ CD, EF взаимно себя пересѣкающимъ на плоскости MN проведеннымъ будетъ перпендикулярна, то и ко всѣмъ линеямъ чрезъ точку B проведеннымъ, то естъ къ самой плоскости будетъ перпендикулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

На плоскости MN возми EB=BF, и CB=BD, концы E и C соедини линеею

неею EC, D и F линеею DF, и будетъ EC=DF, изъ точки A къ концамъ линей EF и CD проведи линеи AE, AC, AD, AF, то будетъ AE=AF, AC=AD. Сверьхъ сего чрезъ точку B проведи линею gh, то будетъ gB=hB. Проведи и линеи Ag и Ah, которые также между собою будутъ равны, треугольникъ AgB= треугольнику AhB, и уголъ ABg= углу ABh. Слѣдовательно линея AB къ линеѣ gh будетъ перпендикулярна. Такимъ же образомъ можно доказать и о всѣхъ другихъ линеяхъ чрезъ точку B проходящихъ.

ТЕОРЕМА 41.

213) *Въ точку какую нибудь* B *на плоскости* MN *находящуюся не можетъ болѣе какъ одна упасть* Fig. 107 *линея, которая бы была перпендикулярна къ плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пустъ будетъ AB перпендикулярная линея къ плоскости MN, она будетъ перпендикулярна и ко всякой линеѣ напр: BC на плоскости проведенной. Представь себѣ, что чрезъ точки A, B, C положена другая проскость ABCD,

 къ пло-

къ плоскости MN перпендикулярная, то понеже уголъ ABC прямой, всякая линея на плоскости ABCD къ точкѣ B проведенная будетъ дѣлать уголъ меньше прямаго.

Слѣдствiе.

214) Изъ точки какой нибудь A къ
Fig. плоскости MN не можетъ болѣе какъ одна
108 перпендикулярная линея проведена быть, потому что ежели бы сверьхъ AB была перпендикулярная AC къ той же плоскости, тобъ ACB былъ уголъ прямой, но ABC есть прямой, слѣдовательно уголъ ACB долженъ быть острой.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 24.

215) *Наклоненiе* [Inclinatio] плоскости AB къ плоскости MN называет-
Fig. ся уголъ IEF или HCD содержащейся
109 между линеями IE и EF или HC и CD перпендикулярными къ разрѣзу плоскостей BG, изъ которыхъ IE и HC проведены на плоскости AB, EF и CD на плоскости MN.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 25.

216) Ежели уголъ IEF или HCD будетъ прямой, то плоскость AB называется

зывается *перпендикулярною* [perpendicularis] къ плоскости MN, а ежели уголъ IEF не будетъ прямой, то плоскость AB называется *наклоненною* [obliqua] къ плоскости MN.

ТЕОРЕМА 42.

217) *Ежели линея AB будетъ перпендикулярна къ плоскости MN то и всякая плоскость положенная чрезъ линею AB будетъ перпендулярна къ плоскости MN; и ежели плоскость EG къ плоскости MN будетъ перпендикулярна, то и линея AB на плоскости EG проведенная перпендикулярная къ общему разрѣзу EF, будетъ къ плоскости MN перпендикулярна.* Fig. 110

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) На плоскости MN проведи линею BD. Понеже линея AB перпендикулярна къ плоскости MN, то перпендикулярна будетъ и къ линеямъ BD и EB, слѣдовательно и плоскость EG будетъ перпендикулярна къ плоскости MN.

2) А ежели плоскость EG будетъ перпендикулярна къ плоскости MN, и уголъ ABE прямой; то будетъ и уголъ ABD прямой; по сему AB дѣлаетъ съ двумя линеями BD и BE на плоскости MN проведенными прямые углы, и къ плоскости MN будетъ перпендикулярна.

ТЕОРЕМА 43.

218) *Ежели* AB *будетъ перпендикулярна къ плоскости* MN, *и линеѣ* AB *проведется параллельная* CD, *то и* CD *будетъ перпендикулярна къ плоскости* MN, *и ежели двѣ линеи* AB *и* CD *будутъ перпендикулярны къ плоскости* MN, *то между собою будутъ параллельны.*

Fig. 111

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Понеже линея CD параллельна линеѣ AB, то чрезъ ихъ положить можно плоскость AD. Но понеже AB перпендикулярна къ плоскости MN, то и плоскость AD будетъ перпендикулярна къ той же плоскости. (§217) Ежели разрѣзъ плоскостей будетъ линея

нея BD, то будетъ уголъ ABD и уголъ CDB прямой же; слѣдовательно CD, на плоскости AD перпендикулярной къ плослости MN, будетъ перпендикулярна къ разрѣзу BD, по сему и къ самой плоскости MN.

2) Ежели бы AB и CD будучи перпендикулярны не были параллельны, то линеѣ AB чрезъ точку D параллельна будетъ другая какая нибудь, напримѣръ ED, и притомъ перпендикулярна къ плоскости MN, но CD перпендикулярна къ плоскости MN; слѣдовательно ED ни перпендикулярна, ни параллельна быть не можетъ (§ 213). Fig. 112

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 26.

219) *Плоскости параллельныя* называются, которые протянуты будучи во всѣ стороны безконечно ни гдѣ себя не пересѣкаютъ.

ТЕОРЕМА 44.

220) *Ежели какая нибудь линея къ двумъ плоскостямъ будетъ перпендикулярна, то плоскости будутъ параллельны.*

 ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 113 Пусть будутъ плоскости MN и PQ перпендикулярны къ линеѣ AB. Чрезъ AB положи плоскость ABCD, которая къ обѣимъ плоскостямъ будетъ перпендикулярна, и прорѣжетъ плоскости въ линеяхъ AC и BD, которые также будутъ перпендикулярны къ линеѣ AB, и никогда соединиться не могутъ; слѣдовательно ниже плоскости MN и PQ.

Слѣдствїе.

221) Ежели двѣ параллельные плоскости MN и PQ пересѣчены будутъ третьею AD, то линеи сѣченій будутъ параллельны, потому что находятся на одной плоскости, а соединиться не могутъ, для того что на плоскостяхъ параллельныхъ находятся.

ТЕОРЕМА 45.

Fig. 114 222) *Части линей AB и CD какое нибудь положенїе имѣющихъ между параллельными плоскостями содержащїяся суть пропорцїональны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть параллельныя плоскости будуть MN, PQ и RS. Концы линей соедини линеями AC и BD и проведи линею AD. Пусть треугольникъ ADB плоскость PQ пересѣчетъ въ линеѣ FG, а треугольникъ ACD тужъ плоскость въ линеѣ EF, то будутъ линеи AC, EF такъ какъ и DB, FG параллельны (§ 221), слѣдовательно будетъ AG: GB=AF:FD и CE:CD=AF:FD (§ 134) по сему AG:GB=CE:CD, такимъ же образомъ доказано будетъ, что AB:CD =AG:CE или AB:CD=BG:ED.

ГЛАВА 6.

О ТѢЛАХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 27.

223) Ежели изъ угловъ фигуры какой нибудь прямолинейной ABCDE проведутся параллельныя и равныя между собою линеи, AF, BG, CH, DI, EK, потомъ концы F, G, H, I, K соединятся прямыми линеями FG, GH, HI, IK, и проч: такъ чтобъ на плоскости Fig. 105

MN,

MN, на которую всѣ точки F, G, H, I, K упадутъ произошла фигура FGHIK, то тѣло, которое заключаютъ плоскости ABCDE, FGHIK, AG, AK, BH, EI и CI называется *призьма* [Prisma].

Слѣдствїе 1.

224) Понеже всѣ линеи AF, BG, CH и проч: суть равны и параллельны между собою, то и плоскость, на которую фигура FGHIK падаетъ, будетъ параллельна фигурѣ ABCDE, или фигура ABCDE параллельна фигурѣ FGHIK, и какъ ту такъ и другую можно взять за основанїе ~~фигуры~~. призьмы.

Слѣдствїе 2.

225) Понеже BG равна и параллельна линеѣ CH, и притомъ BC параллельна линеѣ GH, то будетъ и BC = FK, ED = KI, CD = HI. Слѣдовательно фигура ABCDE равна фигурѣ FGHIK, бока призьмы будутъ параллелограммы, а числомъ ихъ будетъ столько, сколько боковъ будетъ имѣть основанїе.

Слѣдствїе 3.

236) Ежели призьма пересѣчется плоскостью параллельною основанїю, то фигура

тура разрѣза равна будетъ фигурѣ ABCDE или FGHIK.

Слѣдствіе 4.

227) Понеже бокà призьмы суть плоскости и притомъ параллелограммы, поверхность призьмы найдется, ежели всѣхъ параллелограммовъ, стороны призьмы представляющихъ, площади сложены будутъ въ одну сумму.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 28.

228) Ежели линеи AF, BG, CH и проч: будутъ перпендикулярны къ плоскости MN, то призьма называется *перпендикулярная* или *прямая* [rectum], а ежели не будутъ перпендикулярны, то называется *косая* [obliquum].

Слѣдствіе.

229) По сему призьмы прямой, выключая основанія, поверхность будетъ =(AB+BC+CD+AE)×AF, и поверхность всей призьмы найдется, ежели къ боковой поверхности (AB+BC+CD+ED+AE)×AF приданы будутъ площади основаній.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 29.

230) Ежели основаніе будетъ параллелограммъ ABCD, то такая призьма называется *параллелепипедъ* (Parallelepipedum).

Слѣд-

Слѣдствіе.

231) Понеже линеи CD, GH, AB, EF суть параллельны и равны между собою, также и линеи GC, HD, FB и AE параллельны и равны между собою, то будетъ параллелограммъ GHCD = паралл: ABEF, параллелограммъ ACGE = паралл: BDHF, слѣдовательно параллепипедъ включается въ шести параллелограммахъ, изъ которыхъ взаимно противолежащіе суть равны между собою.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 30.

232) Ежели въ параллепипедѣ прямомъ основаніе будетъ четвероугольникъ прямоугольной, параллепипедъ называется *прямоугольной* [Rectangulum], а ежели основаніе будетъ квадратъ, и притомъ AC = CG, то называется *кубъ* [Cubus].

Слѣдствіе.

333) По сему такого параллепипеда поверхность и съ основаніями будетъ $= 2GC \times (AB + AC) + 2AC \times AB$, а куба поверхность, понеже $AC = CG = AB$ будетъ $= 6AB^2$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 31.

234) Ежели основаніе будетъ кругъ, то такое тѣло называется *цилиндръ* [Cylindrus], линея MN, центры круговъ соединяющая называется ось [axis]. Ежели ось къ основанію будетъ перпендикулярна, цилиндръ называется *перпендикулярной* или *прямой* [rectus], а ежели не перпендикулярна, называется *косой* [obliquus].

Примѣчаніе.

235) Цилиндръ также прямой произойдетъ, ежели четвероугольникъ прямоугольной около одного своего бока, какъ около оси обращаться будетъ.

Слѣдствіе 1.

236) Понеже кругъ есть полигонъ регулярной, безчисленное множество боковъ имѣющей, то и цилиндръ будетъ призьма, безчисленное множество боковъ имѣющая.

Слѣдствіе 2.

237) По сему и поверхность прямаго цилиндра, выключая основанія, будетъ равна окружности основанія умноженной на высоту

соту цилиндра. Пусть будетъ діаметръ круга $=d$, а высота цилиндра $=a$, окружность основанія будетъ $=\frac{\pi d}{\delta}$, слѣдовательно поверхность цилиндра будетъ $=\frac{\pi a d}{\delta}$.

Слѣдствіе 3.

238) Ежели цилиндръ пересѣчется плоскостью параллельною основанію, то фигура сѣченія будетъ также кругъ равной основанію.

ТЕОРЕМА 47.

239) *Призьмы, параллелипеды и цилиндры, которые то же или равное основаніе имѣютъ и между параллельными плоскостями находятся, суть равны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представь себѣ, что призьмы или цилиндры пересѣчены параллельно основанію: Фигуры, которыя отъ сѣченія произойдутъ должны быть равны между собою, гдѣ бы сѣченіе ни учинено было (§ 226, 238). А понеже не можетъ болѣе быть сѣченій въ одномъ тѣлѣ, какъ въ другомъ; слѣдовательно

но призмы цилиндры и параллелепипеды на равныхъ основанïяхъ стоящïе, и между параллельными плоскостями находящïеся суть равны между собою.

Слѣдствïе.

240) По сему всякой призмѣ косой и цилиндру косому можно здѣлать равной прямоугольной параллелепипедъ, ежели основанïю призмы или цилиндра здѣланъ будетъ равной прямоугольникъ, а высота равна будетъ высотѣ призмы или цилиндра.

Примѣчанïе.

241) *Высота* призмы или цилиндра есть перпендикулярная линея къ обѣимъ плоскостямъ, на которыхъ основанïя находятся.

242) Не подумалъ бы кто, что полагаю, будто тѣла состоятъ изъ плоскостей, когда равенствомъ оныхъ доказываю равенство тѣлъ: равенство плоскостей только за знакъ равенства тѣлъ почитается.

ТЕОРЕМА 48.

243) *Призмы и цилиндры равное основанïе имѣющïе содержатся*

 между

между собою, такъ какъ ихъ вы-соты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 118 Пусть будутъ призьмы ABCEFG и MNPT, въ которыхъ основанія ABCD и PMN суть равны между собою. Здѣлай PQ=BF, и чрезъ точку Q пересѣки призьму MT плоскостью параллельною основаніямъ, и будетъ отсѣченная призьма равна призьмѣ ACEG, высоту PT раздѣли на сколько нибудь равныхъ частей, и чрезъ всякую точку дѣленія положи плоскость параллельную основаніямъ, такимъ образомъ въ призьмѣ MNPT будетъ столько равныхъ между собою призьмъ, на сколько частей высота PT раздѣлена будетъ. И ежели плоскость QSR упадетъ на которую нибудь точку дѣленія, то явно есть, что въ призьмѣ MPQR столько будетъ равныхъ между собою призьмъ, на сколько частей высота PQ раздѣлена Слѣдовательно

MNPQ : MNPT = PQ : PT или
ABCEFG : MNPT = BF : PT.

А хотя плоскость QR ни съ одною точкою дѣленія не будетъ сходствовать,

вать, однакожъ не можетъ быть, чтобъ въ призьмѣ MNPQ могло быть больше частей или призьмъ малинькихъ, какъ сколько частей высоты PT содержится въ высотѣ PQ, потому что перемѣняя или умножая дѣленіе, на конецъ плоскость QR должна будетъ упасть на точку дѣленія, слѣдовательно и въ семъ случаѣ будетъ

ABCEFG : MNPT = BF : PT.

ТЕОРЕМА 49.

244) *Призьмы и цилиндры одинакой пысоты содержатся между собою такъ какъ ихъ осношанія.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ параллелепипеды прямоугольные ABCD и abcd, въ которыхъ CB = cb, сверьхъ сего пусть еще будетъ и BF = bf, то будетъ и BD = bd. Ежели параллелограммы BD и bd взяты будутъ за основанія, то будетъ ABCD : abcd = AB : ab (§ 243) или ABCD : abcd = ABF : abf. А хотябы въ параллелепипедѣ abcd не было bf = BF, однакожъ параллелограмму abfe можно Fig. 119

 найти

найти другой равной, въ которомъ бы одинъ бокъ равенъ былъ боку параллелограмма ABFE. Изъ сего видно, что всегда будетъ

ABCD : abcd = ABF : abf.

ТЕОРЕМА 50.

245) *Призьма или цилиндръ къ призьмѣ или цилиндру есть въ содержанїи сложенномъ изъ содержанїй высотъ и основанїй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 120 Пусть данныя къ сравненїю тѣла будутъ призьма DAEGC и цилиндръ HL. Здѣлай другую призьму, въ которой бы основанїе abcd равно было основанїю ABCD, а высота ея равна высотѣ цилиндра HL, то по § 243, 244 будетъ

DAEGC : daegc = AE : ae
daegc : HIKL = abcd : HhIi, слѣдоват:
DAEGC : HIKL = AE × abcd : ae × HhIi
или DAEGC : HIKL = AE × ABCD : HK × HhIi

Слѣд-

Слѣдствіе 1.

246) Ежели даны будутъ основанія и высоты тѣлъ въ числахъ, то и содержаніе ихъ числами изображено быть можетъ.

Слѣдствіе 2.

247) Ежели тѣла будутъ параллелепипеды прямоугольные, то основаніе AF содержится къ основанію af такъ какъ $AB \times BF : ab \times bf$, въ такомъ случаѣ будетъ Fig. 119

$$ABCD : abcd = AB \times BF \times BC : ab \times bf \times bc.$$

Слѣдствіе 3.

248) Ежели будетъ $AB = BF = BC$, и $ab = bf = bc$, то есть, ежели тѣла будутъ кубы, то будетъ $ABCD : abcd = AB^3 : ab^3$.

Слѣдствіе 4.

249) Ежели основанія призьмъ сравниваемыхъ будутъ подобны между собою, то будетъ $ABF : abf = AB^2 : ab^2$ (§ 193). Слѣдовательно $ABCD : abcd = AB^2 \times BC : ab^2 \times bc$; по сему цилиндры суть между собою въ содержаніи сложенномъ изъ содержанія удвоеннаго діаметровъ основаній, ипростаго высотъ.

Слѣдствїе 5.

Fig. 120 250) Ежели будетъ $DAEGC = HIKL$, то будетъ и $AE \times ABCD = HK \times HhIi$, слѣдовательно произойдетъ

$$AE : HK = HhIi : ABCD$$

и обратно, ежели будетъ $AE : HK = HhIi : ABCD$, то будетъ $AE \times ABCD = HK \times HhIi$, то есть тѣла равны между собою.

ЗАДАЧА 20.

251) *Вымѣрять или найти толщину призьмы или цилиндра.*

РѢШЕНІЕ.

Fig. 121 Понеже мѣрять есть находить содержанїе мѣры къ мѣряемому, изъ сего слѣдуетъ, что когда хочу мѣрять толстое тѣло, или сыскать его толщину, то мѣра должна быть также толстое тѣло. Возмемъ за мѣру кубъ ABCDE, котораго бокъ $AB = BF = FD$, долженъ быть мѣра въ употребленїе принятая. Чтобъ сыскать тѣла какого нибудь толщину, надлежитъ опредѣлить содержанїе куба за мѣру взятаго къ мѣряемому тѣлу. Пусть будетъ

детъ тѣло, котораго толщину сыскать должно, MNPQRS, основанїе его SMN = B, а высота NP = A, бокъ куба ABCDE = 1 по § 245 будетъ

$$ABCDE : MNPQR = 1 : A \times B.$$

Слѣдовательно число единицъ кубичныхъ, какова есть ABCDE будетъ изображено произведенїемъ $A \times B$, по сему толщина тѣла найдется ежели основанїе на высоту будетъ умножено.

Примѣчанїе.

252) Пусть бокъ куба BF или FE какъ выше сказано будетъ мѣра обыкновенно употребляемая, и раздѣлится на 10 равныхъ частей, такъ чтобъ было $bF = \frac{1}{10}BF$. По точкѣ b пересѣки кубъ плоскостью параллельною плоскости ED: отсѣченная часть EbD будетъ десятая часть куба ABD. Раздѣли и бокъ FE на столькожъ равныхъ частей, чтобъ Fe было $= \frac{1}{10}FE$, чрезъ точку e пересѣки кубъ плоскостью параллельною плоскости BD, и будетъ fFD, десятая часть тѣла EbD, то есть сотая часть куба AFD; такоежъ дѣленїе здѣлай на бокѣ FD, чтобъ было $Fd = \frac{1}{10}FD$, и ежели чрезъ точку d плоскостью параллельною основанїю пересѣчется кубъ AFD, то тремя сѣ-

 ченїями

ченїями отдѣлится кубъ fFd, десятая часть тѣла fFD. сотая тѣла Ebd, и тысящная куба BFD. Подобными сѣченїями можно найти десятую, сотую и тысячную часть куба fFD, то есть десятитысящную, сто тысящную и милїонную часть куба AFD и далѣе. По сему ежели бокъ куба FE будетъ футъ, то Fe будетъ дюймъ, слѣдовательно одинъ футъ кубичной содержитъ въ себѣ тысячу дюймовъ кубичныхъ, и одинъ дюймъ кубичной тысячу линей кубичныхъ. Изъ сего можно опредѣлить въ числѣ толщину тѣла изображающемъ, которые знаки означаютъ футы, которые дюймы и проч: только бы извѣстно было, какое дѣленїе мѣры принято, и что означаетъ перьвой знакъ отъ правой рукй.

253) Изъ сего можно разумѣть, какъ находить толщину призьмы или цилиндра. Изъ данныхъ линей основанїе составляющихъ должно найти площадь основанїя, которая пусть будетъ $= M \times N$, а высота тѣла $= A$. Ежели линеи основанїе опредѣляющїя, и высота тѣла состоятъ изъ такихъ единицъ, какова есть бокъ куба за мѣру взятаго, то по § 245 будетъ

$$ABCD : MNPQ = 1 : M \times N \times A.$$

Слѣдовательно въ тѣлѣ данномъ столько будетъ единицъ кубичныхъ, какова есть ABCD, сколько дастъ произведенїе $M \times N \times A$.

254)

254) Ежели тѣло будетъ цилиндръ ABCD, діаметръ основанія его $AB = D$, высота его $AC = A$, площадь основанія будетъ $= \frac{\pi DD}{4\delta}$, и толщина цилиндра будетъ $= \frac{\pi ADD}{4\delta}$. Fig. 122

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 32.

255) Ежели къ угламъ фигуры ABCDE, изъ точки V въ верху взятой проведены будутъ линеи VA, VC, VD, VE, то произойдетъ тѣло VABCDEV которое *пирамида* [Pyramis] называется. Фигура ABCDE *основаніе* [Basis], трегольники ABV, BVC, CVD и проч: *бока*, а точка V *верьхъ* [Vertex] называется. Fig. 123

Слѣдствіе 1.

256) Понеже основаніе можетъ быть треугольникъ, четвероугольникъ, пятиугольникъ, и какой нибудь многоугольникъ, то и пирамида можетъ быть треугольная четвероугольная и многоугольная.

Слѣдствіе 2.

257) Понеже поверьхность пирамиды составляютъ треугольники AVB, BVC, CVD

 и проч:

и проч: Поверьхность пирамиды найдется выключая основанїе, ежели площади треугольниковъ поверхность составляющихъ сложены будутъ въ одну сумму.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 33.

Fig. 258) Ежели вмѣсто фигуры пря-
124 моугольной основанїе будетъ кругъ ADB, и изъ точки въ верьху взятой V проведется къ окружности его неопредѣленная линея VM, которая въ точкѣ V будучи не подвижна, будетъ двигаться по окружности круга ADB, пока невозвратится на прежнее свое мѣсто, тѣло, которое отсюду произойдетъ называется *конусъ* [Conus]. Точка V *верхъ* [Vertex], кругъ ADB *основанїе*. Линея центръ круга C и точку V соединяющая называется осъ [axis], а линея VB изъ верху V къ какой нибудь точкѣ окружности проведенная *бокъ* [Latus].

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 34.

Fig. 259) *Конусъ прямой* [Conus rectus]
125 называется, ежели ось VC къ основанїю будетъ перпендикулярна, *косой* ежели неперпендикулярна.

При-

Примѣчаніе.

260) Конусъ ничто иное есть, какъ пирамида бесчисленное множество боковъ имѣющая, и конусъ прямой произойдетъ, ежели треугольникъ прямоугольной ACV, около боку своего CV, какъ около оси обращаться будетъ.

ТЕОРЕМА 51.

261) *Поверхность конуса прямаго ADBV, равна треугольнику MNP, котораго основаніе NP равно окружности ABD, а высота MN равна боку конуса AV.* Fig. 126

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть STY будетъ секторъ круга, котораго радіусъ ST=MN, и дуга TY =NP, по сему дуга TY равна окружности круга ABD, а радіусъ ST равенъ боку AV, и такъ, ежели конусъ обернешь секторомъ STY, то онъ точно всю его поверхность покрыть долженъ. Слѣдовательно и треугольникъ MNP будетъ равенъ поверхности конуса.

Слѣдствіе.

262) Пусть будетъ бокъ AV=L, діаметръ AB=D, поверхность конуса будетъ

$=\frac{\pi DL}{2\delta}$

$=\frac{\pi DL}{2\delta}$ и часть поверхности соотвѣтствующая дугѣ AD$=\frac{n\pi D}{\delta}$ будетъ $=\frac{n\pi DL}{2\delta}$.

ТЕОРЕМА 52.

Fig. 27 263) *Поверхность части отсѣченной отъ конуса прямаго ABEF, плоскостью параллельною основанію равна треугольнику, котораго основаніе равно окружности, которой діаметръ есть =AB+EF, а высота бокъ AE.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Понеже поверхность конуса ABV $=\frac{\pi.AV\times AB}{2\delta}$ и малаго EFV$=\frac{\pi.EV.EF}{2\delta}$, слѣдовательно поверхность части ABEF, которая пусть будетъ =S будетъ $=\frac{\pi}{2\delta}(AV\times AB-EV\times EF)$. Но EV=AV−AE, то произойдетъ S, $=\frac{\pi}{2\delta}(AV\times AB-EV\times EF)=\frac{\pi}{2\delta}(AV(AB-EF)+AE\times EF)$, но треугольникъ AVC подобенъ треугольнику EVD, то будетъ

$$AV:EV=AB:EF \text{ и}$$
$$AV:AV-EV=AB:AB-EF \text{ слѣдов:}$$
$$AV\times(AB-EF)=AB\times(AV-EV)=AB\times AE.$$

Изъ

Изъ сего слѣдуетъ, что поверхность части ABFE будетъ $= \frac{\pi}{2\delta}(AB \times AE + AE \times EF) = \frac{\pi}{2\delta}(AB + EF) \times AE$.

Слѣдствіе.

264) Ежели AE раздѣлится на двѣ равныя части, и чрезъ M проведется линея MN, то будетъ $2MN = AB + EF$, слѣдовательно искомая поверхность будетъ $= \frac{\pi \times MN \times AE}{\delta}$.

Примѣчаніе.

295) Что ниговорено о поверхностяхъ цилиндровъ и конусовъ все должно разумѣть только о прямыхъ, какъ находить поверхности конусовъ и цилиндровъ косыхъ, о томъ говорено будетъ въ своемъ мѣстѣ.

ТЕОРЕМА 53.

266) *Пирамиды и конусы, которые одно или равное основанїе имѣютъ, и между параллельными плоскостями находятся суть равны между собою.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будутъ пирамиды треугольныя ABCE и ABCF на основанїи ABC, Fig. 128
и между

и между параллельными плоскостями находящїяся. ПересѢки обѢ пирамиды плоскостью MN, параллельною основанїю ABC, и фигуры сѢченїй будутЪ треугольники abc и αβγ, которые будутЪ подобны основанїю ABC, и для того

BE : bE = BA : ba
BF : βF = BA : βα.

Но сверхЪ сего вЪ треугольникѢ EBF будетЪ

BE : bE = BF : βF слѢдовательно
BA : ba = BA : βα и ba = βα.

ТакимЪже образомЪ доказано будетЪ, что bc = βγ и ac = αγ. СлѢдовательно abc = αβγ. Но понеже пирамиды ABCE и ABCF сутъ одинакой высоты, число сѢченїй не можетЪ быть больше вЪ одной, нежели вЪ другой. СлѢдовательно пирамида ABCE равна пирамидѢ ABCF.

Какое основанїе ни возми вмѢсто треугольника ABC, доказательство не перемѢняется. СлѢдовательно и конусы, которые одно основанїе имѢютЪ, и между параллельными плоскостя-

скоспями находятся, супь равны между собою.

ТЕОРЕМА 54.

267) *Всякая пирамида равное основанїе и равную высоту съ призьмою имѣющая, есть третья часть призьмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ прямая призьма ABCDEF, изъ точки D проведи линеи DB и DC, такимъ образомъ отдѣлится отъ призьмы пирамида ABCD, которой основанїе фигура ABC равно основанїю призьмы, такъ какъ и высота AD обѣимъ тѣламъ общая. Остальной части призьмы основанїе CBEF раздѣли дїагональною CE на двѣ равныя части, и понеже CBEF четвероугольникъ прямоугольной, будетъ CBE=CFE, и пирамида CBED равна будетъ пирамидѣ CEFD, понеже имѣютъ равныя основанїя на одной плоскости и верхи въ одну точку падаютъ. Но ежели въ пирамидѣ CEFD треугольникъ FED взятъ будетъ за основанїе, то высота ея будетъ CF; слѣдовательно пирамида EDFC Fig. 129

EDFC $=$ пирам : ABCE и призьма ABCDEF втрое больше пирамиды ABCD.

Слѣдствїе 1.

268) Ежели основанїе пирамиды будетъ $=B$, а высота ея $=A$, то толщина ея будетъ $=\frac{1}{3}A \times B$.

Слѣдствїе 2.

269) Понеже конусъ есть пирамида безчисленное множество боковъ имѣющая, а цилиндръ есть такаяжъ призьма, слѣдовательно и конусъ будетъ третья часть цилиндра. И такъ ежели дїаметръ основанїя конуса будетъ $=D$, а высота его $=A$, то толщина его будетъ $=\frac{\pi A \times DD}{12\delta}$.

ТЕОРЕМА 55.

270) *Толщина части конуса* Fig. 127 ABEF *параллельно основанїю отсѣченной* $=\frac{\pi}{12\delta}(AB^2+AB \times EF+EF^2) \times DC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Толщина отсѣченной части произойдетъ, ежели изъ цѣлаго конуса ABD отнимется конусъ EFD. Слѣдовательно

вательно толщина отсѣченной части будетъ $=\frac{\pi}{12\delta}(AB^2 \times VC - EF^2 \times VD)$ (§ 269). Но $VD = VC - CD$, то будетъ $\frac{\pi}{12\delta}(AB^2 \times VC - EF^2 \times VD) = \frac{\pi}{12\delta}((AB^2 - EF^2) \times VC + EF^2 \times DC)$. Потомъ треугольникъ AGE подобенъ треугольнику ACD, и для того $AB - EF : DC = AB : VC$ и $VC = \frac{AB \times DC}{AB - EF}$. Слѣдовательно толщина отсѣченной части конуса будетъ $=\frac{\pi}{12\delta}(AB \times DC \times (AB + EF) + EF^2 \times DC) = \frac{\pi}{12\delta}(AB^2 + AB \times EF + EF^2) \times DC$.

ABV

ABE= ABE+ BF

Слѣдствіе.

271) Изъ сего явствуетъ, коимъ образомъ изъ данныхъ поперешниковъ AB и EF и высоты DC можно найти толщину отсѣченной части конуса.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 35.

272) *Шаръ* или *сфера* [sphaera] есть тѣло которое происходитъ отъ обращенія полукруга ADB около діаметра AB, въ такомъ случаѣ діаметръ AD называется *ось* [axis], а точка A или B *полюсь* [Polus]. Отъ обращенія сек- Fig. 130

у тора

тора АСМ произойдетъ тѣло называемое *секторъ шара.*

Примѣчанїе.

273) Всякая точка окружности какъ М, когда полукружїе обращается, описываетъ кругъ, котораго радїусъ есть линея МР, перпендикулярная къ оси АВ. И понеже линеи тѣмъ меньше становятся, чѣмъ далѣе отстоятъ отъ центра С, самой большей кругъ будетъ, котораго плоскость проходитъ чрезъ центръ С, а понеже тѣхъ круговъ, которыхъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара радїусы равны линеѣ АС, и равны между собою, то всѣ сѣченїя шара чрезъ центръ С проходящїя будутъ равны между собою.

ТЕОРЕМА 56.

274) *Шаръ равенъ пирамидѣ, которой основанїе равно поверхности шара, а высота радїусу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Представь себѣ, что поверхность шара состоитъ изъ самыхъ малѣйшихъ квадратовъ, такъ чтобъ всѣ сложенные вмѣстѣ составляли поверхность шара.

шара. Изъ центра шара ко всѣмъ угламъ квадратовъ проведи прямыя линеи, такимъ образомъ шаръ будетъ состоять изъ безчисленнаго числа̀ пирамидъ, которыхъ высота будетъ одинака, и отъ радїуса безконечно или столь малою частицею будетъ разниться, что самой радїусъ за высоту взять можно, а сумма основанїй всѣхъ пирамидъ будетъ равна поверхности шара. Изъ сего явствуетъ, что шаръ будетъ равенъ пирамидѣ, которой основанїе равно поверхности, а высота радїусу шара.

ТЕОРЕМА 57.

275) *Шаръ содержится къ цилиндру, котораго дїаметръ основанїя и высота равны дїаметру шара такъ какъ* 2 : 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ квадратъ ABCD, въ которомъ изъ угла B какъ центра Fig.
опиши четверть круга AGD, и про- 131
веди дїагональную BC. Ежели квадратъ и съ описанными въ немъ фигурами около линеи AB какъ около оси

 будетъ

будетъ обращаться, то квадратъ обращенїемъ своимъ произведетъ цилиндръ, (§ 235) четверть круга ABD половину шара (§ 272), а треугольникъ прямоугольной ABC конусъ (§ 260) Всѣ сїи тѣла пересѣки плоскостью EF параллельною боку AC, то разрѣзы будутъ круги. Круга, которой произойдетъ отъ разрѣзу цилиндра будетъ радїусъ EF, отъ разрѣзу шара будетъ радїусъ EG, отъ разрѣзу конуса радїусъ EL. И понеже разрѣзы суть круги, то будутъ содержаться между собою такъ какъ квадраты радїусовъ EF, EG и EL. Но понеже EF = BD = BG; AC = AB и AC : AB = EL : EB, то будетъ EB = EL, и разрѣзы будутъ содержаться такъ какъ квадраты линей BG, и EB, но $BG^2 = EB^2 + EG^2$ (§ 198), и сїе не перемѣняется, гдѣ ни пересѣки помянутыя три тѣла. Слѣдовательно толстое тѣло, отъ обращенїя квадрата произшедшее, равно тѣламъ отъ обращенїй четверти круга и треугольника произшедшимъ. Но тѣло отъ обращенїя треугольника произшедшее равно третьей части тѣла отъ обращенїя квадрата произшедшаго (§ 269), слѣдовательно шаръ будетъ равенъ двумъ тре-

третямъ цилиндра, или шаръ къ цилиндру содержится такъ какъ 2 : 3.

Слѣдствіе.

276) И такъ чтобъ найти толщину даннаго шара, котораго діаметръ $=D$, сперва должно сыскать толстоту цилиндра, котораго діаметръ основанія $=D$, и высота $=D$, толщина его будетъ $=\frac{\pi D^3}{4\delta}$ (§ 254). Найденную толщину цилиндра надлежитъ умножить на $\frac{2}{3}$, и будетъ толщина шара $=\frac{\pi D^3}{6\delta}$. По сему шары содержатся между собою какъ кубы діаметровъ.

ТЕОРЕМА 58.

277) *Поверьхность шара равна площади круга четырежды пзятой радіусомъ шара описаннаго.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ поверьхность шара $=S$, діаметръ его $=D$, толщина его будетъ $=\frac{1}{6}D \times S$ (§ 274). Слѣдовательно поверьхность шара найдется, ежели толщину раздѣлишь на шестую часть діаметра. Но толщина шара $=\frac{\pi D^3}{6\delta}$ (§ 276), слѣдовательно

 поверьх-

поверьхность его будетъ $=\frac{\pi DD}{\delta}$, а круга, котораго діаметръ D площадь $=\frac{\pi DD}{4\delta}$; изъ сего явствуетъ, что поверьхность шара равна площади самаго большаго круга четырежды взятой.

Слѣдствіе 1.

278) По сему чтобъ найти шара поверьхность надлежитъ сперва сыскать площадь круга самаго большаго, и ее умножить на 4. Произведеніе будетъ поверхность искомая и поверьхности шаровъ содержатся между собою какъ квадраты діаметровъ.

ЗАДАЧА 21.

279) *Найти толщину сегмен-*
Fig. 131 *та шара происходящаго отъ обращенія фигуры* EBDG.

РѢШЕНІЕ.

Въ § 275 доказано, что тѣло отъ обращенія параллелограмма BDEF происходящее равно тѣламъ отъ обращенія треугольника EBL, и фигуры EBDG происходящимъ. Слѣдовательно ежели изъ толщины цилиндра, котораго основаніе BD и высота

EB

EB вычтена будетъ толщина конуса отъ обращенія треугольника EBL произходящаго, то останется толщина сегмента шара отъ обращенія фигуры EBDG произходящаго. Но толщина помянутаго цилиндра $= \frac{\pi}{\delta} EB \times BD^2$ (§ 254) и толщина конуса $= \frac{\pi}{\delta} \times \frac{1}{3} EB . EL^2$. Сверьхъ сего $EL^2 = EB^2 = BG^2 - EG^2 = BD^2 - EG^2$. Откуду толщина конуса будетъ $= \frac{\pi}{\delta} \times \frac{1}{3} EB(BD^2 - EG^2)$, и искомая толщина $= \frac{\pi}{\delta} EB . BD^2 - \frac{\pi}{\delta} \times \frac{1}{3} EB(BD^2 - EG^2) = \frac{\pi}{\delta}(2BD^2 + EG^2) \times \frac{1}{3} EB$. Изъ сего явствуетъ, что радіусы BD, EG и высота EB даны быть должны, чтобъ найти толщину тѣла отъ обращенія фигуры EBDG произходящаго, которая произойдетъ, ежели площадь основанія два раза взятая, приложится къ площади верьхнаго круга, и сумма умножится на третью часть высоты.

Слѣдствіе 1.

280) Изъ параграфа 276 явствуетъ что толщина половины шара будетъ $= \frac{\pi D^3}{12\delta}$, гдѣ D означаетъ діаметръ шара, и ежели вмѣсто D положено будетъ 2AB, толщина полушара отъ обращенія четверти круга ABD

ABD произшедшаго будетъ $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^3$. Отъкуду ежели отнять сегментъ сферы отъ обращенія фигуры EBDG произшедшей, остается толщина сегмента отъ обращенія фигуры AEG произшедшаго, и произойдетъ искомая толщина $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^3 - \frac{\pi}{3\delta} (2AB^2 + EG^2) \times EB$. Но $EB = AB - AE$, то будетъ искомая толщина $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2 \times AE - \frac{\pi}{3\delta} EG^2 \times EB$. Отсюду видно, что дано быть должно, чтобъ найти толщину тѣла, отъ обращенія сегмента AEG происходящаго.

Слѣдствіе 2.

281) Ежели къ тѣлу отъ обращенія сегмента AEG происходящаго, придана будетъ толщина конуса, которой раждается отъ треугольника EBG, то произойдетъ толщина сферическаго сектора. Но толщина сего конуса $= \frac{\pi EG^2 . EB}{3\delta}$. Слѣдовательно толщина сектора сферическаго отъ обращенія фигуры ABG происходящаго будетъ $= \frac{2\pi}{3\delta} AB^2 \times AE$.

ЗАДАЧА 22.

282) *Сыскать поверьхность того тѣла, котораго въ § 279 толщина найдена.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

Понеже шаръ равенъ пирамидѣ, которой основаніе равно поверьхности шара, а высота радіусу, то и секторъ отъ обращенія фигуры ABG происходящей будетъ равенъ пирамидѣ, котораго основаніе поверьхность сферическаго сегмента, а высота радіусъ AB. Но ежели извѣстна толщина такой пирамиды, то площадь основанія произойдетъ, ежели раздѣлена будетъ на третью часть высоты, а понеже толщина сферическаго сектора $=\frac{2\pi}{3\delta}$ $AB^2 . AE$, то площадь основонія или поверьхность сферическаго сегмента будетъ $=\frac{2\pi}{\delta} AB \times AE$, то есть равна прямоугольнику, котораго основаніе окружность круга, котораго діаметръ равенъ діаметру сферы, а высота равна высотѣ сегмента.

Слѣдствіе.

283) Когда извѣстна поверьхность сего сегмента, то и поверьхность сегмента отъ обращенія фигуры EBDG найти будетъ можно. Что здѣсь литеры π и δ означаютъ выше сего изъяснено.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

ПЛОСКОЙ ТРИГОНО-
МЕТРІИ.

ГЛАВА ПЕРЬВАЯ.

О НАИМЕНОВАНІЯХЪ ВЪ ТРИГОНОМЕТРІИ УПОТРЕБЛЯЕМЫХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 1.

1.

Тригонометрїя плоская есть знаніе чрезъ Ариѳметическіе выкладки сыскивать треугольники, которые Геометрія черченьемъ находитъ.

Примѣчаніе.

2) Всякой треугольникъ составляютъ шесть частей, которыми опредѣляется; три бока и три угла. Въ Геометріи показано, что три части треугольника даны быть должны, чтобъ можно было начертить треугольникъ. Слѣдовательно въ Тригонометріи показано быть должно, какъ изъ данныхъ трехъ частей треугольника находить чрезъ выкладки другія его части. Когда даны будутъ только всѣ углы, то извѣстно,

извѣстно, что треугольника, то есть боковъ его опредѣлить не можно; ибо треугольники равные углы имѣющїе, хотя и подобны будутъ, и ограничены боками пропорцїональными; однакожъ сколь велики должны быть бока опредѣлить не возможно. Слѣдовательно между данными тремя частями треугольника, не отмѣнно одинъ бокъ быть долженъ. Сверхъ сего, когда два угла даны будутъ, то не надобно, чтобъ третей данъ былъ, потому что онъ самъ собою будетъ извѣстенъ (§ 69 Геом:). По сему, когда даны только три угла, не можно почитать какъ только двѣ данныхъ частей треугольника.

3) Изъ Геометрїи видно, что треугольникъ описать можно. 1) Когда даны будутъ два бока и уголъ между ими содержащейся. 2) Когда даны будутъ два угла и одинъ бокъ. 3) Когда даны будутъ всѣ три бока и 4) когда въ треугольникѣ прямоугольномъ даны будутъ бока, которой нибудь изъ острыхъ угловъ составляющїе. По сему главной предметъ тригонометрїи долженъ быть рѣшить четырѣ вышепомянутыя задачи. Что надлежитъ до того случая, о которомъ говорено въ § 86 Геометрїи, то и здѣсь видно будетъ, что рѣшенїе онаго бываетъ сомнительно; теперь слѣдуютъ начала и основанїя Тригонометрїи.

ОПРЕ-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 2.

4) Ежели изъ какой нибудь точки М окружности радіусомъ АС описанной проведется къ діаметру АВ перпендикулярная линея МР, то она называется *синусъ* [sinus] дугъ АМ и MDB или угловъ, которыхъ мѣра суть сіи дуги, то есть угла АСМ и ВСМ, которые вмѣстѣ взяты дѣлаютъ уголъ 180° содержащей. Fig. 1.

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

5) *Ежели уголъ* АСМ *или дуга ему соотвѣтствующая, въ кругѣ котораго радіусъ* $=1$ *называется* φ *то синусъ изображается слѣдующимъ образомъ*: sin φ.

Примѣчаніе.

6) Изъ свойства круга видно, что линея МР тѣмъ меньше будетъ, чѣмъ меньше отстоитъ отъ точки А, такъ что ее напослѣдокъ отъ малѣйшей частицы окружности Аа различать не можно. По сему чѣмъ дуга АМ или уголъ АСМ меньше, тѣмъ синусъ его меньше будетъ, и когда уголъ АСМ здѣлается безконечно малымъ АСа, то

то синусъ его будетъ равенъ дугѣ Aa, и наконецъ угла, которой $=o$, синусъ будетъ $=o$. Напротивъ того, когда уголъ ACM или дуга AM прибавляется, то и синусъ ея больше становится, и когда уголъ дойдетъ до 90° или мѣра его будетъ четверть окружности, то синусъ его будетъ CD равенъ радіусу, которой въ тригонометріи всегда полагается $=1$ и называется *синусъ цѣлой* [sinus totus]; слѣдовательно синусъ прямаго угла будетъ $=1$.

7) Когда уголъ или дуга ему соотвѣтствующая будетъ больше становится прямаго угла, то синусъ онаго уменьшаться станетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ уголъ будетъ болѣе 90°, такъ синусъ угла ACN, какъ и угла NCB будетъ линея NQ, и напослѣдокъ синусъ угла 180° будетъ $=o$. По сему, ежели половина окружности, которой радіусъ $=1$ означается литерою π, то будетъ $\sin\pi=o$, а $\sin\frac{1}{2}\pi=1$.

8) Понеже синусъ угла остраго ACM равенъ синусу угла тупаго MCB, которой съ острымъ составляетъ 180°, и по одну сторону діаметра AB падаетъ; слѣдовательно, ежели синусъ PM угла ACM взятъ будетъ за положительной то и тупаго угла MCB синусъ будетъ положительной то есть должно означать знакомъ $+$. Ежели уголъ BCN названъ будетъ θ, то будетъ $NQ=\sin\theta$ и $\sin.(\pi-\theta)=\sin\theta$.

9)

9) Когда уголъ перешедъ предѣлъ 180°, будетъ увеличиваться, то синусъ его начнетъ больше становиться. Напримѣръ: синусъ дуги ANBL или угла ACL будетъ линея RL, такъ какъ и дуги AEL или угла ACL, которой есть дополненіе къ прежнему до 360°. Но понеже RL падаетъ по другую сторону діаметра AB, то его должно почитать за отрицательной и означать знакомъ —. Ежели будетъ ACM = BCL = Φ, то будетъ PM = RL, и синусъ дуги ANL, или угла ACL = $\pi+\Phi$ будетъ = $-\sin\Phi$, такъ какъ и угла ACL, котораго мѣра есть дуга AEL, синусъ будетъ = $-\sin\Phi$. Когда дуга ANL увеличиваясь будетъ напослѣдокъ равна дугѣ ADBE = $\frac{3\pi}{2}$ или уголъ будетъ равенъ тремъ прямымъ, то синусъ его будетъ линея CE; и понеже она падаетъ по другую сторону діаметра AB, будетъ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ и синусъ дуги AE, которая есть дополненіе части окружности ANBE до 360° грусовъ, будетъ также = -1.

10) Изъ сего видѣть можно, что ежели уголъ ACK названъ будетъ θ, то синусъ дугѣ ANLK = $2\pi-\theta$ и AK будетъ = $-\sin\theta$; и наконецъ синусъ цѣлой окружности, или угла, которой въ себѣ содержитъ 360°, синусъ будетъ = 0, то есть $\sin 2\pi = 0$.

Ф ОПРЕ-

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 3.

11) Прямая линея MF синусъ угла MCD, которой есть дополненїе угла ACM до 90° или до угла прямаго, называется *Косинусъ* [Coſinus] угла ACM, или понеже $MF = PC$; линея PC называется *Косинусъ* угла ACM, а часть радїуса AP называется *Синусъ обращенной* [Sinus verſus] угла ACM.

ПОЛОЖЕНІЕ 1.

12) *Ежели уголъ* ACM *означенъ будетъ литерою* Φ, *то косинусъ его и синусъ обращенной изображаются слѣдующимъ образомъ*: $\cos\Phi$: ſin. verſΦ.

Слѣдствїе.

13) Понеже уголъ PMC есть прямой, то должно быть $PM^2 + PC^2 = MC^2$, но PM означаетъ синусъ цѣлой, которой всегда полагается $= 1$, слѣдовательно всегда должно быть $\sin\Phi^2 + \cos\Phi^2 = 1$, $\sin\Phi = \sqrt{(1 - \cos\Phi^2)}$ и $\cos\Phi = \sqrt{(1 - \sin\Phi^2)}$. Изъ сего видно, что когда данъ будетъ синусъ какого нибудь угла можно найти его косинусъ, и ежели данъ будетъ косинусъ, можно найти синусъ тогожъ угла.

Примѣчанїе.

14) ЛинеяPC увеличивается, когда уголъ ACM меньше становится, такъ что когда

когда уголъ ACM будетъ $=0$, линея PC равна будетъ AC, то есть косинусъ угла, которой $=0$, будетъ $=1$: А когда уголъ ACM будетъ равенъ прямому, или $=\frac{1}{2}\pi$, то косинусъ его будетъ $=0$, то есть $\cos\frac{1}{2}\pi=0$. Ежели уголъ ACM будетъ больше прямаго, то косинусъ его падая по другую сторону точки C, начнетъ прибавляться, какъ напримѣръ косинусъ угла ACN будетъ линея CQ, и понеже CQ по правую сторону центра C на діаметрѣ падаетъ, то косинусъ угла тупаго должно означать знакомъ —, ежели косинусы по лѣвую сторону въ разсужденіи центра C падающіе взяты будутъ за положительные. Пусть уголъ BCN назовется θ, то будетъ уголъ $ACN=\pi-\theta$, и $\cos ACN=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$. Напослѣдокъ когда уголъ здѣлается равенъ двумъ прямымъ, или мѣра его будетъ половина окружности, то косинусъ его будетъ радіусъ CB, но понеже по другую сторону точки C падаетъ, то будетъ $\cos\pi=-1$.

15) Когда уголъ еще болѣе увеличиваться будетъ, то косинусъ его начнетъ уменьшаться. Напримѣръ косинусъ угла ACL будетъ линея CR меньше, нежели CB, и понеже на діаметрѣ по правую сторону еще центра C падаетъ, должно означать знакомъ —, ежели CRL $=$ ACM будетъ $=\Phi$, то будетъ $\cos(\pi+\Phi)=-\cos\Phi$. Напослѣдокъ когда уголъ отъ часу увеличиваясь здѣлает-

CB,

∠CR

ся равенъ тремъ прямымъ, или мѣра его будетъ дуга $\frac{3\pi}{2}$, то косинусъ его будетъ $=0$, слѣдовательно $\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

16) Потóмъ ежели уголъ перейдетъ и сей предѣлъ, то косинусъ начнетъ прибавляться, и понеже будетъ падать на дiаметрѣ по лѣвую сторону въ разсужденiи точки C, то должно его почитать положительнымъ, и означать знакомъ $+$. Ежели будетъ $ACK=\theta$, то косинусъ угла $ACK=2\pi-\theta$ или дуги ANK будетъ $CS=\cos\theta$., и на конецъ будетъ $\cos 2\pi=1$.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 4.

Fig. 2. 17) Ежели въ точкѣ A проведется касательная линея, и въ обѣ стóроны продолжится безъ опредѣленно; потóмъ взявши на окружности круга какую нибудь точку M изъ центра C чрезъ оную проведется линея CT, которая бы пересѣкла касательную Tt, линея AT содержащаяся между точками A и T, называется *Тангенсъ* [Tangens] угла ACM или дуги AM, а ID ежели ACD будетъ уголъ прямой, такъ чтобъ уголъ MCD былъ дополненiе прежняго до прямаго, называется *Тангенсъ* угла MCD или *Котангенсъ* [Cotangens] угла ACH. ACM

поло-

ПОЛОЖЕНІЕ 2.

18) *Ежели уголъ ACM назпанъ будетъ Ф, тангенсъ AT и котангенсъ DI, пъ кругѣ котораго синусъ цѣлой = 1 изображается какъ слѣдуетъ* tangФ *и* cotФ.

Слѣдствіе.

19) Ежели изъ точки M къ діаметру AB, опустишь перпендикулярную линею MP, то будетъ треугольникъ CPM подобенъ треугольнику CAT, и CP : PM = AC : AT. но AC синусъ цѣлой = 1. Слѣдовательно будетъ $AT = \text{tang}\Phi = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$. Такимъ же образомъ будетъ $\cot\Phi = \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$. Слѣдовательно $\text{tang}\Phi . \cot\Phi = 1$. По сему когда данъ будетъ синусъ какого нибудь угла, то нашедъ косинусъ тогожъ (§ 13) можно будетъ найти его тангенсъ и котангенсъ.

Примѣчаніе.

20) Ежели тингенсы угловъ, которые падаютъ по сторону D діаметра AB взяты будутъ за положительные, то тангенсы, которые будутъ падать по сторону E діаметра AB, должно брать за отрицательные. Подобнымъ образомъ котангенсы, которые падаютъ по сторону A діаметра DE почитать должно за положительные, а кото-

рые падаютъ по сторону B, за отрицательные.

21) Когда уголъ ACM уменьшаться будетъ, то и тангенсъ его меньше становиться, а котангенсъ увеличиваться будетъ, такъ что угла очень малаго тангенсъ почти не будетъ разнствовать отъ синуса того же угла, и угла, которой $=0$, тангенсъ будетъ $=0$, а котангенсъ безконеченъ: Напротивъ того, когда уголъ увеличиваться будетъ, то и тангенсъ увеличивается, а котангенсъ меньше становится, и наконецъ, когда мѣра угла будетъ ~~половина~~ окружности, то тангенсъ его будетъ безконеченъ, а котангенсъ $=0$, то есть $\text{tang}\frac{1}{2}\pi=\infty$ (∞ есть знакъ безконечной величины) $\cot\frac{1}{2}\pi=0$.

22) Когда точка взята будетъ на другой четверти окружности, и изъ оной чрезъ центръ къ касательной Tt проведется линея, то угла ACN тангенсъ будетъ At и понеже падаетъ по другую сторону діаметра, то оной должно почитать за отрицательной, такъ какъ и котангенсъ Di, которой отъ точки D больше становится и падаетъ ужѐ по другую сторону діаметра DE; Пусть уголъ NCB будетъ $=\theta$, то будетъ $\text{tang}(\pi-\theta)=-\text{tang}\,\theta$, и $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$.

23) Когда точка N начавъ двигаться отъ точки A по окружности дойдетъ до

точки

точки B, и уголъ ACB будетъ равенъ двумъ прямымъ, тангенсъ его будетъ $=0$, а котангенсъ безконеченъ и притомъ отрицательной, потому что долженъ упасть по другую сторону дїаметра DE, по сему $\tang\pi = 0$: $\cot\pi = -\infty$.

24) Ежели тажъ точка далѣе по окружности двигаться будетъ, то тангенсъ угла ACm или дуги ANm будетъ увеличиваться, и понеже упадетъ по сторону D линеи AB, будетъ положительной, а котангенсъ уменьшаться будетъ; но понеже падаетъ по сторону D дїаметра DE, то также должно почитать положительнымъ. По сему, ежели назовется $BCm = ACM = \Phi$, то будетъ $\tang(\pi+\Phi) = \tang\Phi$, $\cot(\pi+\Phi) = \cot\Phi$, и въ точкѣ E тангенсъ дуги ABE или угла равнаго тремъ прямымъ будетъ отрицательной и безконеченъ, а котангенсъ $=0$, слѣдоват: $\tang\frac{3\pi}{2} = -\infty$, $\cot\frac{3\pi}{2} = 0$.

25) Когда точка еще далѣе двигаться будетъ, и уголъ будетъ больше трехъ прямыхъ вмѣстѣ взятыхъ, то тангенсъ будетъ уменьшаться, а котангенсъ увеличиваться, однакожъ какъ тангенсъ такъ и котангенсъ будутъ отрицательные. Ежели положится $ACt = \theta$, то будетъ $\tang(2\pi-\theta) = -\tang\theta$ $\cot(2\pi-\theta) = -\cot\theta$ На конецъ когда уголъ будетъ равенъ четыремъ прямымъ, то тангенсъ цѣлой окружности будетъ $=0$, а котангенсъ положительной безконеченъ.

26) Изъ сихъ примѣчаній явствуетъ, какъ по синусамъ, косинусамъ, и тангенсамъ можно различать уголъ тупой отъ остраго. Ежели нѣкоторая дуга въ кругѣ, котораго синусъ цѣлой равенъ единицѣ будетъ $=\Phi$, то произойдетъ.

$\sin(\frac{1}{2}\pi-\Phi)=\cos\Phi$	$\cos(\frac{1}{2}\pi-\Phi)=\sin\Phi$
$\sin\frac{1}{2}\pi=1$	$\cos\frac{1}{2}\pi=0$
$\sin(\pi-\Phi)=\sin\Phi$	$\cos(\pi-\Phi)=-\cos\Phi$
$\sin\pi=0$	$\cos\pi=-1$
$\sin(\pi+\Phi)=-\sin\Phi$	$\cos(\pi+\Phi)=-\cos\Phi$
$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$	$\cos\frac{3\pi}{2}=0$
$\sin(2\pi-\Phi)=-\sin\Phi$	$\cos(2\pi-\Phi)=\cos\Phi$
$\sin 2\pi=0$	$\cos 2\pi=1$

$\mathrm{tang}\frac{1}{2}\pi=\infty$	$\cot\frac{1}{2}\pi=0$
$\mathrm{tang}(\frac{1}{2}\pi+\Phi)=-\mathrm{tang}\Phi$	$\cot(\frac{1}{2}\pi+\Phi)=-\cot$
$\mathrm{tang}\pi=0$	$\cot\pi=-\infty$
$\mathrm{tang}(\pi+\Phi)=\mathrm{tang}\Phi$	$\cot(\pi+\Phi)=\cot\Phi$
$\mathrm{tang}\frac{3\pi}{2}=-\infty$	$\cot\frac{3\pi}{2}=0$
$\mathrm{tang}(2\pi-\Phi)=-\mathrm{tang}\Phi$	$\cot(2\pi-\Phi)=-\cot\Phi$
$\mathrm{tang}2\pi=0$	$\cot 2\pi=\infty$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ 5.

27) Линея CT изъ центра круга
Fig. 2. чрезъ данную точку окружности M къ касательной Tt проведенная называется *Секансъ* [Secans] угла ACM, а линея Ct, которая

торая къ котангенсу тогожъ угла проведена называется *Косекансъ* [Cosecans].

Примѣчанiе.

28) Свойствъ синуса обращеннаго, секанса и косеканса здѣсь пространно не разыскиваю, для того что ихъ употребленiе рѣдко, и со всѣмъ безъ нихъ обойтись можно; но только то объ нихъ присовокуплю, что для подобiя треугольниковъ ACT и CPM, будетъ PC : MC = AC : CT, откуду $CT = \frac{1}{cos\Phi}$; подобнымъ образомъ будетъ CI $= \frac{1}{sin\Phi}$, и $\frac{CT}{CI} = \frac{sin\Phi}{cos\Phi} = tang\Phi$

ТЕОРЕМА I.

29) *Синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, синусы обращенные, секансы, косекансы тогожъ угла, но въ разныхъ кругахъ, содержатся между собою такъ какъ радiусы, которыми круги описаны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ уголъ ACM, и дуги радiусами AC и BC описанныя AM и BN, слѣдовательно мѣры угла ACM Fig. 3.

 будутъ

будутъ дуги AM и AN. Синусы угла ACM будутъ MP и NQ, косинусы CP и CQ, тангенсы AT и BO, синусы обращенные AP и BQ, секансы CT и CO. Но понеже AT, PM, BO и QN перпендикулярны къ линеѣ AC, всѣ будутъ параллельны между собою, и для того будетъ CM : CN = PM : QN = CP : CQ, но CM = CA и CB = CN, будетъ CA : CB = PM : QN = CP : CQ и CA : CP = CB : CQ Сверьхъ сего CA : CA − CP = CB : CB − CQ, то есть CA : AP = CB : BQ, притомъ AC : CB = AT : BO = CT : CO. Откуду явствуетъ, что синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, секансы, косекансы тогожъ угла, но въ разныхъ кругахъ, будутъ содержаться такъ какъ радїусы, къ которымъ относятся.

Слѣдствїе.

30) По сему какой бы радїусъ взятъ ни былъ, содержанїе извѣстнаго синуса, косинуса, тангенса, котангенса и проч: къ радїусу всегда будетъ одинако, и оное какъ въ линеяхъ такъ и въ числахъ изобразить аккуратно можно, откуду явствуетъ, что величина синуса цѣлаго зависитъ отъ произволенїя.

Примѣ-

Примѣчаніе

31) Радїусъ, какъ я уже выше упомянулъ, полагается отъ всѣхъ равенъ единицѣ, и раздѣляется на 10000000 равныхъ частей, чтобъ аккуратнѣйшїя содержанїя синусовъ къ цѣлому имѣть можно было. Содержанїя всѣхъ къ цѣлому синусу числами изображенныя составляютъ таблицы синусовъ и тангенсовъ. Когда должно дѣлать выкладки, которыя большей точности требуютъ, то употребляются таблицы, въ которыхъ радїусъ на 10000000000 раздѣленъ полагается. Разные есть способы сочинять таблицы синусовъ и тангенсовъ, но самыхъ легкихъ здѣсь показать не можно, довольно, когда докажу нѣкоторыя предложенїя, которыя не только къ сочиненїю таблицъ путь показываютъ, но и во всѣхъ Тригонометрическихъ выкладкахъ немалую пользу приносятъ.

ТЕОРЕМА 2.

32) *Ежели даны будутъ двѣ дуги, или угла* Φ *и* θ, *ихъ синусы и косинусы, то будетъ* Fig. 4.

$$\sin(\Phi+\theta) = \sin\Phi\cos\theta + \cos\Phi\sin\theta$$
$$\cos(\Phi+\theta) = \cos\Phi\cos\theta - \sin\Phi\sin\theta.$$

ДОКА-

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ $AC = CF = 1$, дуга $AM = \phi$, $MN = \theta$. Изъ точки M къ радїусу AC проведи перпендикулярную линею PM, будетъ $PM = \sin\phi$, $PC = \cos\phi$. Потомъ изъ точки N къ радїусамъ AC и MC проведи перпендикулярныя линеи NS и NQ, изъ которыхъ первая будетъ $= \sin\theta$ и $CS = \cos\theta$, а послѣдняя $= \sin(\phi + \theta)$ и $QC = \cos(\phi + \theta)$. Наконецъ проведи перпендикулярныя линеи SR и ST, треугольникъ SNT будетъ подобенъ треугольникамъ SRC и MPC, и для того

$MC : PM = SN : ST$ или $1 : \sin\phi = \sin\theta : ST = \sin\phi\sin\theta$

$MC : PC = SN : NT$ $1 : \cos\phi = \sin\theta : NT = \cos\phi\sin\theta$

$MC : PM = CS : SR$ $1 : \sin\phi = \cos\theta : SR = \sin\phi\cos\theta$

$MC : PC = SC : RC$ $1 : \cos\phi = \cos\theta : CR = \cos\phi\cos\theta$.

Но $NQ = NT + SR$ и $QC = RC - ST$. Слѣдов: $NQ = \sin(\phi + \theta) = \sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi$, и $QC = \cos(\phi + \theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta$.

Слѣдствїе 1.

33) Ежели будетъ $\phi = \theta$, то будетъ $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ и $\cos 2\phi = \cos\phi^2 - \sin\phi^2$. Слѣдовательно, ежели данъ будетъ синусъ угла какого нибудь, то можно найти какъ синусъ такъ и косинусъ такого, которой вдвое его больше, потомъ вчетверо въ восемь разъ, и такъ далѣе.

Слѣд-

Слѣдствїе 2.

34) Понеже $\tan(\Phi+\theta)=\frac{\sin(\Phi+\theta)}{\cos(\Phi+\theta)}$ (§ 19) слѣдовательно будетъ $\tan(\Phi+\theta)=\frac{\sin\Phi\cos\theta+\sin\theta\cos\Phi}{\cos\Phi\cos\theta-\sin\Phi\sin\theta}$. Ежели числителя и знаменателя раздѣлить на $\cos\Phi\cos\theta$, произойдетъ $\tan(\Phi+\theta)=\frac{\tan\Phi+\tan\theta}{1-\tan\Phi\tan\theta}$. Потóмъ ежели будетъ $\Phi=\theta$, то произойдетъ $\tan 2\Phi=\frac{2\tan\Phi}{1-\tan\Phi^2}$. Откуду явствуетъ, какъ изъ даннаго тангенса угла какого нибудь можно найти тангенсъ угла, которой вдвое его больше, вчетверо и далѣе.

ТЕОРЕМА 3.

35) *Ежели даны будутъ двѣ дуги или угла Φ и θ, ихъ синусы и косинусы, то будетъ*

$$\sin(\Phi-\theta)=\sin\Phi\cos\theta-\sin\theta\cos\Phi$$
$$\cos(\Phi-\theta)=\cos\Phi\cos\theta+\sin\Phi\sin\theta.$$

= Cos. φ cos θ + sin.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть будетъ $AC=CB=1$, дуга $AM=\Phi$, $MN=LM=\theta$, то будетъ дуга $AL=\Phi-\theta$. Потóмъ ежели сверьхъ того, что въ предъидущей теоремѣ учинено, изъ точки L къ поперешнику проведешь перпендикулярную линею LX, то будетъ

детъ $LX = SR - SI = \sin(\phi - \theta)$ и $CX = CR + XR = \cos(\phi - \theta)$. Понеже $MN = LM$, то должно быть $SN = SL$, $NT = SI$ и $LI = XR = ST$. Но выше сего найдено $= SR = \sin\phi \cos\theta$, $NT = SI = \cos\phi \sin\theta$, $CR = \cos\phi \cos\theta$, $ST = LI = XR = \sin\phi \sin\theta$; то будетъ $LX = \sin(\phi - \theta) = \sin\phi \sin\theta - \cos\phi \sin\theta$ и $CX = \cos(\phi - \theta) = \cos\phi \cos\theta + \sin\phi \sin\theta$.

Слѣдствiе.

36) Понеже $\tan(\phi - \theta) = \frac{\sin(\phi - \theta)}{\cos(\phi - \theta)}$ (§ [illegible]9) то будетъ $\tan(\phi - \theta) = \frac{\sin\phi \cos\theta - \sin\theta \cos\phi}{\cos\phi \cos\theta + \sin\phi \sin\theta} = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi \tan\theta}$

Примѣчанiе.

37) Сiи теоремы сверьхъ великаго употребленiя въ Алгебраическихъ выкладкахъ не мало служатъ къ сочиненiю таблицъ синусовъ и тангенсовъ. Въ дополненiе сей матерiи присовокупляю еще слѣдующiя задачи.

ЗАДАЧА 1.

38) *Ежели какого нибудь угла или дуги даны будутъ синусъ и косинусъ, найти синусъ и косинусъ половины тогожъ угла.*

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

Пусть данной уголъ будетъ ACM $=\phi$, и даны будутъ $PM = \sin\phi$ $PC = \cos\phi$. Fig. 5.
Проведи хорду AM, и чрезъ точку Q, гдѣ хорда раздѣляется на двѣ равныя части, проведи изъ центра линею NC, будетъ $AN = NM$, AM перпендикулярна къ линеѣ NC, (§ 98 Геом:) MQ будетъ синусъ дуги MQ MN или половины дуги AM, а QC ея косинусъ. Но понеже PM и LC PC даны, то можно будетъ найти $AP = AC - PC = 1 - \cos\phi$ полагая синусъ цѣлой $= 1$, и въ треугольникѣ прямоугольномъ AMQ AMP по Пиѳагоровой теоремѣ будетъ $AM^2 = AP^2 + PM^2 = 1 - 2\cos\phi + \cos\phi^2 + \sin\phi^2$. А понеже $\sin\phi^2 + \cos\phi^2 = 1$, то будетъ $AM^2 = 2 - 2\cos\phi = 2(1 - \cos\phi)$. Слѣдовательно $AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{2(1 - \cos\phi)}$ и $\frac{1}{2}AM = AQ = MQ = \frac{1}{2}\sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sin\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 - \cos\phi)} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\phi)}{2}}$. Нашедъ такимъ образомъ синусъ половины дуги или угла ϕ, косинусъ онаго найдется по § 13 $QC = \cos\frac{1}{2}\phi = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}AM^2)} = \sqrt{\frac{(1 + \cos\phi)}{2}}$.

Слѣдствіе.

39) Изъ сего явствуетъ, что ежели данъ будетъ синусъ какого нибудь угла, то

то можно найти синусъ и косинусъ половины, четвертой, осьмой части и про. того же угла.

ЗАДАЧА 2.

40) *Найти синусъ дуги содержащей въ себѣ одну минуту.*

РѢШЕНІЕ.

Понеже бокъ шестіугольника регулярнаго въ кругѣ начерченнаго равенъ радіусу круга, то хорда дуги содержащей 60° будетъ = радіусу, и синусъ дуги 30° будетъ = половинѣ радіуса, то есть ежели положить синусъ цѣлой или радіусъ круга = 10000000, то будетъ $\sin 30° = 5000000$, и такъ по § 38 изъ даннаго синуса 30° можно будетъ найти синусъ угла 15°, потомъ 7° 30′, потомъ 3° 45′ и такъ далѣе пока не дойдешь до весьма малаго угла какъ напр: 52″ 44‴ 3ⁱᵛ 45ᵛ, котораго найденной синусъ пусть будетъ = s, а косинусъ онаго почти равенъ будетъ радіусу. Понеже синусы весьма малыхъ угловъ или дугъ отъ самыхъ дугъ почти неразнствуютъ, то будетъ какъ дуга къ дугѣ такъ синусъ первой дуги къ синусу

синусу второй, слѣдовательно синусъ дуги 1′ можно будетъ найти посылая: какъ дуга 52″ 44‴ 3^IV 45^V къ дугѣ 1′, такъ s къ синусу одной минуты, которой найдется =29,09 и косинусъ =9999999; а потомъ синусы и косинусы угловъ 2′, 4′, 8′ и проч. а по § 32 можно будетъ найти синусъ 6′, а потомъ 3′ и проч.

Примѣчаніе.

41) Опредѣливши синусъ дуги одной минуты можно найти содержаніе окружности къ діаметру слѣдующимъ образомъ: Понеже синусъ угла очень малаго почти неразнствуетъ отъ дуги, то такой синусъ можно взять за самую дугу. Слѣдовательно цѣлая окружность будетъ состоять изъ 2909×360×60 такихъ частей, какихъ 1000000 составляютъ радіусъ или какихъ 2000000 составляютъ цѣлой поперешникъ. Слѣдовательно діаметръ къ окружности будетъ такъ какъ 2000000 : 2909×360×60 = 2000000 : 6283440 = 100000 : 314172, гдѣ первые четыре знака съ истинными сходствуютъ. Ежели бы найденъ былъ синусъ дуги 1″, то бы подобнымъ образомъ точное содержаніе діаметра къ окружности опредѣлено было, потому что чѣмъ меньше уголъ, тѣмъ синусъ его меньше разнится отъ самой дуги.

ГЛАВА 2.

О РѢШЕНІИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

ТЕОРЕМА 4.

42) *Во всякомъ треугольникѣ прямоугольномъ синусъ цѣлой содержится къ синусу угла котораго нибудь изъ острыхъ, такъ какъ Гипотенуса къ боку противулежащему помянутому углу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Fig. 6. Пусть будетъ треугольникъ прямоугольной ACB, и возмемъ въ разсужденіе уголъ C. Пусть будетъ CE=CM =1, то есть синусъ цѣлой: Ежели изъ M опустишь перпендикулярную линею MP, то будетъ треугольникъ CPM подобенъ треугольнику CBA, откуду CM : PM=CA : AB, но CM=1 и MP синусъ угла MCP, слѣдовательно будетъ 1 : sinMCP=CA : AB. Подобнымъ образомъ будетъ 1 : sinCAB=CA : CB.

Слѣдствіе 1.

43) Проведи линею ET, которая будетъ тангенсъ угла ECT, и параллельна

линеѣ

линеѣ AB, откуду произойдетъ CE : ET = CB : AB, но CE = 1, и ET тангенсъ угла ECM. Слѣдовательно 1 : tangC = CB : AB. Подобнымъ образомъ будетъ 1 : tangA = AB : CB.

Слѣдствїе 2.

44) Ежели въ треугольникѣ какомъ нибудь ACB изъ верьху A къ противолежащему боку проведется перпендикулярная линея AD, то будетъ 1 : tangCAD = AD : CD и 1 : tangBAD = AD : BD. Изъ сего произойдетъ tangCAD : tangDAB = DC : BD. Fig. 7.

ТЕОРЕМА 5.

45) *Во всякомъ треугольникѣ ABC бока содержатся между собою такъ какъ синусы угловъ бокамъ противолежащихъ.* Fig. 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ верьху треугольника къ основанїю, ежели надобно продолженному, опусти перпендикулярную линею AD, то будетъ 1 : sin ACB = AC : AD

и 1 : sin ABC = AB : AD. (§ 42)

Откуду произойдетъ AC×sinACB = AB ×sin ABC, и потомъ

AC : AB = sin ABC : sin ACB.

ЗАДАЧА 3.

46) *Изъ данныхъ двухъ угловъ треугольника и одного бока найти всѣ протчїя части треугольника по таблицамъ.*

РѢШЕНIЕ.

Пусть въ треугольникѣ ABC даны
Fig. будутъ углы A и B и бокъ CB, то
8. будетъ извѣстенъ и третей уголъ ACB по § 70 Геом. и для того прочїе два бока AB, AC опредѣлены будутъ посылками $\sin A : \sin B = CB : AC$ и $\sin A : \sin C = CB : AB$, что помощїю логариѳмовъ учинено будетъ слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ $A = 61^\circ\ 15'$, $B = 94^\circ\ 20'$, и бокъ данной $BC = 587,036$, то будетъ $C = 24^\circ\ 25'$ и

$$l\sin A = 9,9428643$$
$$l\sin C = 9,6163382$$
$$lBC = 2,7686647$$

$$l\sin B + lBC = 12,3850029$$
$$l\sin C + lBC - l\sin A = 2,4421386 = lAB$$

По сему бокъ AB будетъ $= 276,782$ и бокъ AC найдется слѣдующимъ образомъ:

$l\sin A$

$$
\begin{aligned}
l\sin A &= 9,9428643\\
l\sin B &= 9,9987567\\
l\,CB\ \ l\sin C &= 2,7686647\\
\hline
l\sin B + l\,CB &= 12,7674214\\
l\sin B + l\,CB - l\sin A &= 2,8245571 = l\,AC.
\end{aligned}
$$

По сему бокъ AC будетъ $=667,663$.

ЗАДАЧА 4.

47) *Изъ данныхъ двухъ боковъ AC и CB и угла которому нибудь изъ данныхъ боковъ противолежащаго опредѣлить другія части треугольника.* Fig. 9.

РѢШЕНІЕ.

Пусть въ треугольникѣ ACB данные бока будутъ AC и CB и уголъ данной A, по § 45 синусъ угла ABC найдется посылая BC : AC = sinCAB : sinABC, но понеже sinABC = sinCBE, то когда бокъ BC данному углу противолежащей будетъ меньше другаго даннаго, то сомнѣнію бываетъ подвержено тупой ли и острой уголъ найденному синусу соотвѣтствующей брать должно, потому что по другую сторону перпендикула CD проведена быть можетъ

жетъ линея CE=EB. Равнымъ образомъ, ежели бы въ треугольникѣ ACE даны были бока AC, CE и уголъ CAE, уголъ CEA найдется посылая EC : AC = sinCAB : sinCEA. Но понеже sinCEA = sinABC, ежели будетъ CB=CE, то не извѣстно какой уголъ брать должно. Сїе сомнѣнїе развѣ тогда рѣшится, когда извѣстно будетъ тупоугольной ли или остроугольной треугольникъ къ рѣшенїю дается. Пусть будетъ ABC треугольникъ тупоугольной, въ которомъ AC=667, 663; BC=587, 036, и уголъ A=61° 15′, синусъ угла ABC найдется слѣдующимъ образомъ:

$$lBC = 2,7686647$$
$$lAC = 2,8245571$$
$$lsinA = 9,9428643$$
$$lAC + lsinA = 12,7674214$$
$$lAC + lsinA - lBC = 9,9987567 = lsinB.$$

Которому въ таблицахъ соотвѣтствуетъ уголъ 85° 40′. Но понеже треугольникъ долженъ быть тупоугольной, уголъ боку AC противолежащей долженъ быть тупой или дополненїе найденнаго до 180°: то есть уголъ ABC=94°, 20′. А ежели бы данъ

данъ былъ треугольникъ ACE, что бы былъ уголъ $AEC = 85°, 40'$; протчія части треугольника найти ужѐ не трудно.

Примѣчаніе.

49) Изъ сего явствуетъ, что сказано въ § 3. Но бываютъ случаи, въ которыхъ помощію извѣстныхъ свойствъ треугольниковъ сомнѣніе сіе отвращается. 1) Ежели данной уголъ будетъ самъ прямой или тупой, тогда другіе не отмѣнно острые быть должны. 2) Когда бокъ данной BC данному углу противолежащей будетъ больше, нежели другой данной бокъ AC; въ такомъ случаѣ уголъ боку AC противолежащей долженъ быть меньше угла CAE, слѣдовательно ни тупой, ни прямой быть не можетъ, ежели уголъ CAE будетъ острой. Такъ напримѣръ, ежели бы данные бока были AB и CB, а уголъ данной A; тобъ въ рѣшеніи никакого сомнѣнія не было.

50) Ежели случится, что логариѳмъ синуса какого нибудь угла въ таблицахъ совершенно сходствующаго не находится, чтобъ найти аккуратнѣйшей уголъ, должно поступать слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ большей ближайшей логариѳмъ найденному $= A$, меньшей ближайшей $= a$, а найденной

денной $=\alpha$, тогда дѣлай слѣдующее тройное правило:

$$A-a:\alpha-a=60'':q=\frac{(\alpha-a)60''}{A-a}$$

Что дастъ число секундъ. Пусть будетъ логариѳму a соотвѣтствующей уголъ Φ , то найденному соотвѣтствовать будетъ $\Phi+q$. Напримѣръ въ треугольникѣ ABC пусть будетъ $AB=256$, $BC=349$, уголъ $A=55^\circ\ 25'$ уголъ C найдется посылкою

$$\begin{aligned} lBC &= 2,5185139 \\ lAB &= 2,4082400 \\ l\sin A &= 9,9155389 \\ \hline lAB+l\sin A &= 12,3237989 \\ lAB+l\sin A-lBC &= 9,9052850=l\sin C \end{aligned}$$

и будетъ $A-a=934$, $\alpha-a=228$ отсюду произойдетъ $q=\frac{(\alpha-a)60''}{A-a}=14''$, слѣдовательно уголъ $C=53^\circ\ 31'\ 14''$ потомъ найдется уголъ $B=71^\circ\ 3'\ 46''$.

51) Ежели въ треугольникѣ прямоугольномъ дана будетъ Гипотенуза AC , и бокъ которой нибудь , напримѣръ CD , то
Fig. уголъ A найдется по § 45 посылая $AC:CD$
9. $=1:\sin CAD$. Когда извѣстенъ будетъ уголъ A , то уголъ C и бокъ AD найти будетъ можно. Пусть будетъ $AC=276,783$, $CD=133,129$.

lAC

$lAC = 2,4421386$
$lCD = 2,1242726$
$l\,sin\,tot = 10,0000000$

$lCB + l\,sin\,tot = 12,1242726$
$l\,sin\,A = 9,6821340$. Слѣдовательн. уголъ $A = 28°,45'$.

ТЕОРЕМА 48.

52) *Въ треугольникѣ какомъ нибудь непрямоугольномъ сумма двухъ боковъ* AB+AC *содержится къ разности ихъ* AC−AB, *такъ какъ тангенсъ половины суммы угловъ помянутымъ бокамъ противолежащихъ, къ тангенсу половины разности ихъ.* Fig. 10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угла A треугольника ABC меньшимъ бокомъ AB опиши кругъ GBE, и будетъ, ежели CA продолжится до G, $AB+AC=GC$ и $AC-AB=EC$. Проведи линею BE и ей параллельную CD, возми $AG=AB$, то будетъ уголъ GBE прямой и уголъ GDC также прямой, $BCD=EBC=BEG$. Ежели DC взята будетъ за синусъ цѣлой, то BD будетъ тангенсъ угла DCB, а GD бу-

детъ тангенсъ угла DCG. Но понеже GAB=ABC+BCA=ABE+AEB=2AEB, то будетъ BEA=DCG половина суммы угловъ бокамъ AB и AC противолежащихъ. Изъ точки C проведи CH параллельную линеѣ AB, и другую CF, такъ чтобъ равна была CB, и будетъ BCH=ABC, GCD=HCD, BCD=FCD, и BCA=FCH, слѣдовательно BCF будетъ разность и BCD будетъ половина разности угловъ бокамъ AB и AC противолежащихъ. Но треугольникъ GEB подобенъ треугольнику GCD, откуду произойдетъ

$$GC : EC = GD : BD \quad \text{или}$$

$$AB+AC : AC-AB = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(ABC+ACB) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(ABC-ACB).$$

ЗАДАЧА 5.

Fig. 53) *Изъ данныхъ двухъ бо-*
10. *ковъ треугольника* AB, AC *и угла между ими содержащагося* BAC *найти другія части треугольника.*

РѢШЕНІЕ.

Когда угоѣъ A извѣстенъ, то можно найти сумму угловъ ABC и ACB и ея половину, которая будетъ $= \frac{180^\circ - BAC}{2}$. Угла, которой такимъ образомъ

разомъ найденъ будетъ, возми изъ таблицъ тангенсъ, и дѣлай тройное правило. Какъ сумма данныхъ боковъ къ разности ихъ, такъ tang $\frac{1}{2}$ (180—BAC) къ четвертому пропорціональному, которое будетъ тангенсъ половины разности угловъ искомыхъ (§ 52). Найденную разность угловъ, ежели придашь къ половинѣ суммы искомыхъ угловъ, произойдетъ уголъ большему боку противолежащей B, а когда разность угловъ изъ половины суммы угловъ вычтешь, найдется уголъ меньшей C. Пусть будетъ BAC = 94° 20′, AB = 276, 783 : AC = 587, 036, будетъ сумма угловъ ABC + ACB = 180° — BAC = 85° 40′, по сему $\frac{1}{2}$(ABC + ACB) = 42° 50′ AB + AC = 863, 819, и AC — AB = 310, 253 и будетъ

$$
\begin{aligned}
l(AC+AB) &= 2,9364227 \\
l(AC-AB) &= 2,4917160 \\
l\,tang\tfrac{1}{2}(ABC+ACB) &= 9,9671225 \\
\hline
& 12,4588385 \\
l\,tang\tfrac{1}{2}(ABC-ACB) &= 9,5224158
\end{aligned}
$$

Слѣдовательно $\frac{1}{2}$(ABC—ACB) = 18° 25′. Отсюда найдется ABC = $\frac{1}{2}$(ABC+ACB) + $\frac{1}{2}$(ABC — ACB) = 42° 50′ + 18° 25′ = 61°

61° 15′ и $ACB = \frac{1}{2}(ABC + ACB) - \frac{1}{2}(ABC - ACB) = 42° \ 50' - 18° \ 25' = 24°, 25'$. Теперь изъ прежнихъ предложенїй бокъ BC опредѣлить будетъ можно.

Слѣдствїе.

Fig. 6. 54) Когда данной уголъ будетъ прямой, то уголъ C найдется посылая CB : BA = 1 : tang. ACB. Пусть будетъ CB = 327, BA = 241.

$$
\begin{aligned}
lCB &= 2,5145477 \\
lAB &= 2,3820770 \\
l\sin tot &= 10.0000000 \\
\hline
& \quad 12.3820170 \\
l\,tang\, C &= 9.8674693
\end{aligned}
$$

Слѣдовательно уголъ C = 36°, 23′, и по § 50 можно найти аккуратнѣйшее.

ЗАДАЧА 6.

Fig. 11. 55) *Изъ данныхъ трехъ боковъ треугольника ABC опредѣлить углы A, B и C.*

РѢШЕНIЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Изъ угла A большему боку противолежащаго, растворенїемъ самаго мень-

меньшаго бока AB опиши окружность GBDE, и протяни CA до окружности, будетъ AC+AG=AB+AC и EC=AC−AB, по сему какъ CG такъ и CE будутъ извѣстны. Но понеже CB : CG=CE : CD (§ Геом. 157) найдется такимъ образомъ CD, потомъ BD=BC−CD и ея половина будетъ извѣстна. Изъ центра A опусти перпендикулярную AF къ линеѣ BC, и произойдетъ треугольникъ прямоугольной ABF, въ которомъ бока AB и BF извѣстны. Слѣдовательно по § 47, можно будетъ опредѣлить уголъ BAF, потомъ и протчія всѣ части. Пусть будетъ AB=276, 783, AC=587, 036 BC=667, 663. Найдется CG=AC+AB=863 819; CE=AC−AB=310, 253.

lCB= 2,8245571
lCG= 2,9364227
lCE= 2,4917160

lCG+lCE= 5,4281387
lCG+lCE−lCB = 2,6035816=lCD,
слѣдовательно CD=401,404. CB−CD=BD
(=206,259. и BF=133, 129.

Теперь по § 51 уголъ BAF найдется слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{l}
lBA = 2,4421386 \\
lBF = 2,1242726 \\
l\sin.\,tot = 10,0000000 \\
\hline
l\sin BAF = 9.6821340,
\end{array}
$$

которому въ таблицахъ соотвѣтствуетъ уголъ 28°, 45′, слѣдовательно уголъ ABF = 61°, 15′.

Примѣчаніе.

56) Ежели уголъ данъ будетъ не только въ градусахъ и минутахъ, но притомъ и секунды находиться будутъ, то логариѳмъ синуса такого угла помощїю обыкновенныхъ таблицъ синусовъ и тангенсовъ можно будетъ найти дѣлая противную посылку той, которая въ § 50 предписана. Напримѣръ пусть данъ будетъ уголъ 53° 31′ 14″, котораго синусу соотвѣтствующей логариѳмъ сыскать должно. Надлежитъ взять логариѳмъ синусовъ, которые соотвѣтствуютъ угламъ 53° 31′ и 53° 32′, сыскать ихъ разность 934 и посылать

$$60'' : 934 = 14'' : Q = 216.$$

Четвертое пропорцїональное число ежели придать къ логариѳму, которой соотвѣтствуетъ меньшему углу, то есть 53° 31′, сумма будетъ логариѳмъ угла 63° 31′ 14″ и найдется 9.9052938. Хотя какъ одинъ, такъ

такѣ и другой способѣ не со всѣмѣ аккуратны, и потому здѣсь отмѣнной найденѣ логариѳмѣ, нежели какѣ тамѣ полагается, однакожѣ разность между ими будетѣ весьма мала, и для того вѣ случаѣ нужды сіи способы употреблять можно.



ПРИБАВЛЕНІЕ
содержащее
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ.

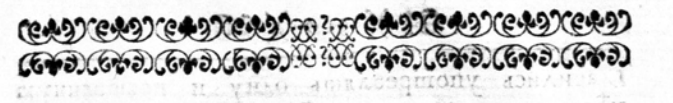
Главное дѣло практической Геометріи состоитъ въ томъ, чтобъ на поверьхности земной проводить прямыя линеи, мѣрять углы и линеи, изъ которыхъ другія по предписаннымъ въ теоретической Геометріи пра́виламъ находить должно; откуду видно, что въ теоретической Геометріи о начерченіи фигуръ предложенныя пра́вила, сюды собственно принадлежать не могутъ, потому что поверьхность земная разнствуетъ отъ поверьхности, какую въ Геометріи себѣ представили. Хотя на поверьхности земной различныя неравности находятся, и земля шаровидную фигуру имѣетъ, однакожъ здѣсь не противно оную принять за плоскую и горизонтальную, потому что разстоянія, которыя въ практической Геометріи мѣряемъ, такъ малы, что безъ чувствительной погрѣшности можно представить, будто бы они на плоскости лѣжали Геометрической, и притомъ при мѣряніи угловъ и линей въ практикѣ строгости

Геометрической ни коимъ образомъ удовлетворить не возможно.

Не безъ основанія противъ моего предпріятія можетъ учинено быть возраженіе, что я не въ своемъ мѣстѣ о сей матеріи говорить начинаю, потому что точныя и совершенныя правила практической Геометріи, не на теоретической только основаніе имѣютъ, но на Механикѣ, Оптикѣ и Астрономіи: И я тогожъ мнѣнія. Но чтобъ читатель видѣть могъ нѣкоторую пользу доказанныхъ въ теоретической Геометріи истиннъ, и сколь суетно тѣхъ мнѣніе, которые думаютъ, что тонкости и разыскиванія Математическія безполезны, принялъ я намѣреніе занявъ нѣкоторыя изъ помянутыхъ частей истинны, которыя всякому почти извѣстны, сообщить здѣсь начальныя основанія практической Геометріи и нѣкоторыя предложенія, которыя въ теоретической, чтобъ союзу не разорвать, опущены.

Понеже до практической Геометріи принадлежитъ проводить линеи, мѣрять углы и линеи, то порядокъ требуетъ, чтобъ прежде всего описать мѣры и инструменты при мѣряніи

нїи употребляемые ; а потóмъ ужè какъ оными мѣрять должно , и какъ изъ данныхъ линей и угловъ неизвѣстныя находить. Все сїе какъ возможно короче предложить стараться буду не вступая въ тонкости ради того , что сего безъ помощи другихъ частей Математическихъ учинить не возможно ; Потóмъ къ пространному описанїю сихъ вещей , а особливо инструментовъ требуется цѣлая книга. Здѣсь намѣренъ я нѣсколько отступить отъ порядку , которой прежде мною наблюдаемъ былъ , потому что долженъ принять нѣкоторыя истинны за доказанныя и извѣстныя , которыхъ здѣсь еще доказать не возможно.



ГЛАВА ПЕРЬВАЯ.

О ПРОВЕДЕНІИ ПРЯМЫХЪ ЛИНЕЙ НА ПОВЕРЬХНОСТИ ЗЕМНОЙ, И МѢРЯНІИ ЛИНЕЙ И УГЛОВЪ.

I.

Мѣрять ни что иное есть, какъ находить содержаніе мѣры къ мѣряемому количеству. Слѣдовательно мѣра съ мѣряемымъ должна быть одинакаго роду. Мѣра линей должна быть линея, мѣра угловъ уголъ, мѣра плоскостей плоскость и проч. Углы мѣряются помощію окружности круга на части раздѣленной; и понеже всякаго круга окружность раздѣляется на 360 равныхъ частей градусы называемыхъ, и круги всѣ подобны между собою, какая бы окружность къ мѣрянію угловъ ни употреблена была, мѣра угловъ всегда и вездѣ будетъ постоянна, разность только можетъ быть въ строеніи инструмента. Но со всѣмъ дѣло инако обстоитъ въ мѣряніи линей, потому что не во всѣхъ мѣстахъ одинакой длины мѣра употребляется. И для того прежде всего приняты должны быть въ разсужденіе мѣры или маштабы и ихъ раздѣленія. Въ протчемъ желать должно, чтобъ всѣ народы со-

гласились употреблять одну и постоянную мѣру, чтобъ не послѣдовало со временемъ того, что съ мѣрами у древнихъ употребляемыми случилось, то есть что теперь о величинѣ ихъ подлиннаго ничего утвердить не можно.

2) **Сажень Геометрическая** раздѣляется на 10 футовъ, футъ на 10 дюймовъ, дюймъ на 10 линей, линея на 10 скрупуловъ. Сажень означается знакомъ (°) футъ знакомъ (′), дюймъ знакомъ (″), линея знакомъ (‴), скрупулъ означается знакомъ (′ᵛ); и такое дѣленіе можно продолжить сколько угодно. Величина Геометрическаго фута зависитъ отъ произволенія. Всякая линея раздѣленная на 10 равныхъ частей можетъ взята быть за Геометрической футъ, десятая часть будетъ Геометрической дюймъ, сотая часть будетъ линея и тысящная часть скрупулъ. По сему три фута, семь дюймовъ и восемь линей Геометрическихъ изображены будутъ слѣдующимъ образомъ: 3′, 7″, 8‴, или просто 378‴. Не смотря на то, что сажень и футъ зависятъ отъ произволенія. Шагъ Геометрической имѣетъ постоянную и опредѣленную длину, а имянно: пять Ренскихъ футовъ составляютъ шагъ Геометрической.

3) Хотя Парижской футъ, Ренской, Аглинской и всѣ протчія въ длинѣ

между

между собою разнствуютъ, однакожъ каждой раздѣляется на 12 дюймовъ, дюймъ на 12 линей. Линея Парижскаго фута для точнѣйшаго содержанія къ протчимъ раздѣляется на 10 равныхъ частей, которыя точками называются, и въ футѣ будетъ ихъ содержаться 1440. Мѣра называемая у Французовъ Тоазъ состоитъ изъ 6 футовъ, Миля Парижская содержитъ въ себѣ 2000 тоазовъ, Миля средняя Французская состоитъ изъ 2282 тоазовъ. И миля мореплавателями Французскими употребляемая состоитъ изъ 2853 тоазовъ. Слѣдующая таблица показываетъ содержаніе Парижскаго фута къ другимъ, или сколько такихъ частей Парижскаго фута, которыхъ 1440 составляютъ цѣлой футъ, въ другомъ какомъ изъ слѣдующихъ содержится;

футъ,			
Парижской	1440	Турецкой	3140
Ренской	1391, 395	булонской	1686
древн. Римской	1317	Гданской	1272
Аглинской	1351	Лейденской	1391
Шведской	1317	Гальской	1320
Дацкой	1403	брюссельской	1278
Венеціанской	1540	Страсбургской	1283

4) Ренской футъ представленъ здѣсь аккуратнѣе, потому что онъ употребительнѣе прочихъ. Въ Россіи употребляются Аг-

линскіе футы, и для того не безполезн[а] будетъ и слѣдующая табличка:

1 верста содержитъ въ себѣ			500 саж:
1 сажень	-	-	3 арш:
1 аршинъ	-	-	16 вершк:
1 сажень	-	-	7 Агл: фут:
1 Аглинская миля		-	5000 футовъ.

Задача 1.

5) *Ежели дано сколько въ разстояніи* **AB** *содержится футовъ, дюймовъ, линей и проч: парижскихъ или другой какой* Fig. 1. *мѣры, найти, сколько въ ней будетъ содержаться футовъ, дюймовъ и линей другой какой нибудь мѣры.*

Рѣшеніе.

Чтобъ сію задачу рѣшить можно было, должно напередъ знать содержаніе мѣръ, которыя въ задачу входятъ, къ сему служитъ сообщенная выше сего табличка. Пусть линея AB содержитъ въ себѣ 125 Парижскихъ футовъ, то сколько въ ней содержится футовъ, дуймовъ, линей ренскихъ найдется слѣдующимъ образомъ: Понеже Парижской футъ раздѣляется на 1440 частей, число такихъ частей въ линеѣ AB найдется посылкою.

$$1 : 125 = 1440 : P$$

Най-

Найдется P = 180000. Теперь чтоб найти сколько в той же линеѣ будет ренских футов, дюймов и линей посылай.

$$1391,395 : 180000 = 1 : Q \text{ будет } Q = 129,366$$

Что означает 1391,395 частей Парижскаго фута составляют 1 ренской фут, сколько зделают 180000 частей, четвертое пропорціональное число будет Q = 129, 366 ренск: мѣры. Подобным образом должно поступать при других случаях. Положим вмѣсто даннаго числа литеру N, будет

$$1 : N = 1440 : P$$
$$1391,395 : P = 1 : Q$$

и произ: $1391,395 : N = 1440 : Q$ (§ 87 Ариѳм.)

Откуду явствует, коим образом дѣлая одно тройное правило задачу рѣшить можно.

Задача 2.

6) *От данной точки* A *к точкѣ* B *провесть прямую линею.* Fig. 2.

Рѣшеніе.

Как прямая линея на бумагѣ проводится, всякому извѣстно. На доскѣ или на камнѣ дѣлается помощію нитки мѣлом набѣленной, которая, когда от данной точки до другой натянется, то приподнявши по срединѣ

срединѣ надлежитъ опустить, тогда отъ удару на доскѣ или на камнѣ здѣлается слѣдъ, которой будетъ требуемая линея.

На поверьхности земной проводить линею нѣсколько труднѣе. Пусть будетъ точка A, отъ которой къ точкѣ B должно провесть прямую линею. Для сего дѣйствія надлежитъ имѣть довольное число легкихъ, прямыхъ, равныхъ и на одномъ концѣ обостренныхъ колышковъ, чтобъ способно было втыкать въ землю, вышиною по долѣ росту человѣческаго, когда на гладкомъ или не очень горбатомъ мѣстѣ прямую линею провесть должно; въ противномъ случаѣ вышина нѣкоторыхъ должна быть по состоянію мѣста. Вколотивши въ точкахъ A и B по колу, сколько можно вертикально, надлежитъ между ими въ точкахъ C, D, E и проч. въ небольшомъ одинъ отъ другаго разстояніи, напримѣръ въ тритцати или въ сорока саженяхъ втыкать другіе, такъ чтобъ изъ за каждаго кола не видно было другихъ, или когда чрезъ колъ A и B посмотришь, то бы ни одинъ изъ среднихъ ни на которую сторону не выдавался. Тожъ должно разумѣть и о всѣхъ прочихъ. Изъ сего видно, что не требуется, чтобъ колышки въ среднихъ точкахъ были вертикально поставлены. Когда между A и B глядя по разстоянію довольное число кольевъ поставлено будетъ, то по точкамъ C, D, E, F отъ A къ B

веревку

веревку или цѣпь протянуть должно, которая прямую линею означать будетъ.

Примѣчаніе 1.

7) Ежели разстояніе AB будетъ не велико и поверьхность земли будетъ равна, то довольно въ точкахъ A и B утвердить по колу, и веревку протянувши отъ A къ B натянуть, которая будетъ означать на поверьхности прямую линею.

8) Предложенной выше сего способъ хотя аккуратенъ, но медлителенъ нѣсколько будетъ, когда прямую линею должно протянуть на нѣсколько верстъ, напримѣръ пять, шесть или болѣе. Въ такихъ случаяхъ съ немалымъ успѣхомъ употребляются мишени, которыхъ напередъ описаніе сообщить должно. На дощечкѣ четвероугольной мѣдной или деревянной MN по концамъ придѣлываются подъ прямыми углами маленькія дощечки MQ и PN, изъ которыхъ на одной въ срединѣ дѣлается узинькая скважина hg, а на другой MQ прежней противолежащая ef пошире, и по самой срединѣ протягивается волосокъ pn. Такой инструментъ къ проведенію на поверьхности земной прямыхъ линей употреблять можно слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ точка A, отъ которой къ точкѣ B должно провесть прямую линею. Надъ точкою A должно поста- Fig. 3. Fig. 4.

вить

вить на ношкѣ мишени, а точку В означить коломъ вертикальнымъ или другимъ какимъ знакомъ. Потомъ мишени MN въ такое привесть положеніе, чтобъ знакъ въ точкѣ В поставленной, волосокъ въ мишени MQ и глазъ были на одной прямой линеѣ. Тогда укрѣпивши конецъ веревки или шнура въ точкѣ A, одинъ долженъ смотрѣть сквозь мишени на знакъ BC, а другой долженъ натягивая сколько можно веревку прямо итти на знакъ BC, и веревку тащить по землѣ за собою. Когда тотъ, которой сквозь діоптры смотритъ, примѣтитъ, что идущей съ веревкою человѣкъ, на которую нибудь сторону отдаляться начнетъ, то долженъ ему дать знакъ, въ которую сторону податься должно, чтобъ попасть на линею зрѣнія CQP. Такимъ образомъ, когда человѣкъ тащя за собою веревку дойдетъ до положеннаго знака, то веревка будетъ означать прямую линею. Вмѣсто мишеней можно также употреблять и зрительныя трубки.

Задача 3.

9) *Здѣлать маштабъ или размѣръ Геометрической.*

Рѣшеніе.

Fig. 5. На прямой линеѣ возми десять равныхъ частей, и разстояніе, которое десять равныхъ частей занимаютъ, перенеси

на линею AC, сколько разъ можно. Ежели кто довольствоваться хочетъ въ размѣренiи десятыми частьми мѣры AB, то машта́бъ ужѐ и здѣланъ. Но ежели кто стараясь о точности и сотенныхъ частей оставить не хочетъ, тотъ къ линѣѣ AC, подъ какимъ нибудь угломъ, но способнѣе подъ прямымъ, поставить долженъ линею AG, и на оной взять по произволенiю десять равныхъ частей Aα, αϐ, ϐγ и проч. Чрезъ каждую точку α, ϐ, γ и проч. провесть параллельныя линѣѣ AC, и на последнюю DF перенесть десять такихъ же частей, на какiя AB раздѣлена. Потомъ ежели проведешь линеи Ba, 1b, 2c, 3d и проч. даже до 9D, то размѣръ или машта́бъ Геометрической будетъ здѣланъ. И ежели AB означать будетъ сажень Геометрическую, то B1, 12, 23 и проч: будетъ означать футы, 1α одинъ дюймъ, 2ϐ два дюйма, 3γ три дюйма, и такъ далѣе.

Доказательство.

Что B1, 12, 23 и проч: означать будутъ футы, то всякъ видѣть можетъ. А понеже 1α, 2ϐ, 3γ и проч: параллельны линѣѣ aE, то будетъ $BE : B\alpha = aE : 1\alpha$, но $B\alpha = \frac{1}{10}BE$. Слѣдовательно 1α будетъ $= \frac{1}{10}aE$. Равнымъ образомъ доказано будетъ, что 2ϐ два дюйма, 3γ три и такъ далѣе. А ежели AB будетъ означать футъ; B1, 12, 23 и проч: будутъ дюймы, 1α одна линея, 2ϐ двѣ линеи, 3γ три линеи и такъ далѣе.

Примѣ-

Примѣчаніе.

10) Для твердости и для способнѣйшаго употребленія такое раздѣленіе дѣлается на Металлической доскѣ, или на твердомъ деревѣ, и по такому машшабу вымѣрянныя линеи на бумагу кладутся.

Задача 4.

11) *Прямую линею вымѣрять.*

Рѣшеніе.

Чтобъ линею вымѣрять, надлежитъ прежде всего имѣть мѣру.

Fig. 5.

1) Къ мѣрянію линеи на бумагѣ проведенной будетъ служить вмѣсто мѣры въ предъидущей задачѣ здѣланной машшабъ, напримѣръ ежели бы должно было вымѣрять линею MN, то поставя одну ножку циркула на точку M, другую надлежитъ раздвинуть до N, потомъ глядя по длинѣ линеи одну ножку циркула поставить на линею PP или QQ и смотрѣть гдѣ другая упадетъ. Положимъ, что когда одна ножка поставлена будетъ на QQ другая упадетъ гдѣ пересѣкаютъ себя линеи 3d и δδ, и AB означаетъ футы, то линея MN будетъ 2′, 3″, 4‴.

2)

2) Для мѣрянія линей на поверьхности земной проведенныхъ должно имѣть веревку извѣстной длины, или способнѣе цѣпь изъ равныхъ звеньевъ состоящую AB, потому что веревка отъ влажности короче становится, а въ сухую погоду разтягивается. Когда проведенную линею должно мѣрять на такомъ мѣстѣ, гдѣ поверьхность землй равна или не очень горбата, мѣрятельную веревку или цѣпь должно по землй протягивать параллельно съ веревкою, которая линею означаетъ. Длина мѣрятельной веревки будетъ показывать сколь велико отъ одной точки до другой разстояніе, и мѣрятельную цѣпь или веревку съ мѣста на мѣсто должно переносить по тѣхъ поръ, пока не вымѣряно будетъ все назначенное разстояніе. Fig. 6.

3) Ежели поверьхность землй будетъ горбата, то вѣрнѣе линею вымѣрять можно, ежели линея назначится кольями вертикальными, и веревку или мѣрятельную цѣпь по воткнутымъ кольямъ протянешь, такъ чтобъ концы ея не только съ крайними, но и съ средними кольями дѣлали углы прямые; но понеже ни веревку ни цѣпь не можно такъ натягивать, чтобъ вся была въ горизонтальномъ положеніи, то для отвращенія сего недостатку должно имѣть легинькіе развилинки, которые между кольями ставить, и по нимъ мѣрятельную цѣпь или веревку протягивать должно.

 Примѣ-

Примѣчанїе 1.

12) Когда линею мѣрять случится на ровномъ мѣстѣ, то вмѣсто мѣрятельной веревки или цѣпи для вѣрности употребляются шестики длиною сажени въ двѣ или три, потому что они не подвержены перемѣнамъ, которымъ веревки бываютъ подвержены, и не причиняютъ замѣшательствъ, которыя бываютъ отъ мѣрятельной цѣпи. Послѣдней случай мѣрять линею по вертикальнымъ кольямъ покажется, можетъ быть, труденъ, потому что колъ поставить вертикально и трудно и долго времени на то требуется. Но при семъ примѣчать надлежитъ, что хотя колья отъ вертикальнаго положенїя на одинъ, два или три градуса отстоять будутъ, однакожъ чувствительной погрѣшности въ мѣрянїи линей произвесть не могутъ. Чтобъ о семъ удостовѣ-
Fig. 7. риться, положимъ, что разстоянїе AC вымѣрять должно, которое содержитъ въ себѣ десять саженей, и притомъ, что въ точкѣ C колъ поставленъ вертикально, а въ точкѣ A колъ AG отъ вертикальнаго положенїя отдалился на одинъ градусъ. Такимъ образомъ вмѣсто AC мѣряемъ линею EF, которая съ коломъ AG дѣлаетъ уголъ прямой; слѣдовательно и уголъ DEF будетъ $=1^\circ$. По сему изъ треугольника EDF найдется линея EF посылкою.

$$\sin EFD : \sin tot = ED : EF.$$

И понеже

И понеже ED почти ничѣмъ неразнствуетъ отъ AC, то въ помянутой посылкѣ вмѣсто ED можно положить AC, откуду

$$
\begin{array}{rl}
l AC = & 1,0000000 \\
l \sin tot = & 10,0000000 \\
\hline
 & 11,0000000 \\
l \sin EFD = & 9,9999338 \\
\hline
l EF = & 1,0000662
\end{array}
$$

Которому логариѳму соотвѣтствующее число найдется 10,0015; слѣдовательно на десяти саженяхъ въ семъ случаѣ погрѣшность будетъ $\frac{15}{10000}$ саж. Положимъ, что на разстоянїи 1000 саженей колъ отъ кола ставленъ въ десяти саженяхъ, и каждой колъ въ ту же сторону отъ вертикальнаго положенїя отстоитъ на 1°, то погрѣшность не болѣе будетъ, какъ $\frac{3}{20}$ саж. которую въ практикѣ презрѣть можно.

13) Линея ED меньше, нежели AC, по сему ежели бы въ посылкѣ положить истинную длину линеи ED, то бы погрѣшность еще менѣе произошла. Но колъ отъ кола почти никогда такъ близко ставить нѣтъ нужды, обыкновенно ставятся дружка отъ дружки въ 30 или 40 саженяхъ. Въ такомъ случаѣ и большую въ углѣ ошибку презрѣть можно. Чтобъ сїе показать, положимъ что колъ AG отстоитъ отъ кола CD на 40 саж. и AG отъ верти-

кальнаго положенія отстоитъ на 3°, а колъ CD поставленъ вертикально. Чтобъ найти линею EF, которую дѣйствительно въ мѣсто линеи AF мѣряемъ, должно посылать какъ прежде

$$\sin EFD : \sin tot = AC : ED.$$

$$lAC = 1.6020600$$
$$l\sin tot = 10.0000000$$
$$11.6020600$$
$$l\sin EFD = 9.9994044$$
$$lED = 1.6026556$$

Которому соотвѣтствующее число найдется 40,054. Слѣдовательно погрѣшность будетъ $\frac{54}{1000}$ саж. И ежели положить, что при мѣряніи разстоянія около 1000 саж. или двухъ верстъ колъ отъ кола ставленъ въ 40 саженяхъ, и каждой колъ выключая послѣдней отъ вертикальнаго положенія отстоитъ на 3° и въ одну сторону, то мѣряя такимъ образомъ линею погрѣшность произойдетъ $1\frac{14}{45}$ или почти $1\frac{1}{4}$ сажени, которую на такъ великомъ разстояніи презрѣть можно. Въ практикѣ за щастіе должно почитать, когда кто въ мѣряніи линеи около 1000 саженей не болѣе ошибется, какъ на сажень. Погрѣшность еще менѣе произойти должна, ежели колья не въ одну, но въ противныя стороны отъ вертикальнаго положенія отстоять будутъ. Откуду слѣдуетъ, что при семъ случаѣ не требуется, чтобъ колья находи-

находились точно въ вертикальномъ положенiи, и что въ постановленiи кольевъ можно положиться на одни глаза.

Примѣчанiе 2.

14) Ежели кто въ постановленiи кольевъ въ вертикальное положенiе на глазомѣръ положиться не хочетъ, тотъ выше сего помянутой точности можетъ удовлетворить слѣдующимъ образомъ: Надлежитъ имѣть четвероугольную, прямую, пустую призьму, у которой съ двухъ боковъ вставлена слюда. Конецъ ея, которой втыкать должно, сколько возможно долженъ быть таковъ, какiе будутъ у кольевъ Геометрическихъ, или нѣсколько поменьше. По бокамъ внутренней поверьхности призьмы слюденымъ противолежащимъ должны проведены быть вертикальныя линеи, и внутри въ верьху на тонкой ниточкѣ привязана гирька. Ежели призьма надъ тѣмъ мѣстомъ, гдѣ колъ поставить должно, въ такое приведена будетъ положенiе, чтобъ отвѣсъ въ призьмѣ или загараживалъ вертикальныя на бокахъ линеи или съ обѣими висѣлъ параллельно, тогда призьму колотить должно въ землю. Потомъ ежели на мѣсто ея поставленъ будетъ простой колъ, то и онъ отъ вертикальнаго положенiя весьма мало, а иногда ни сколько разнствовать не будетъ.

15) Къ томужъ намѣренію или лучше сказать къ познанію, не далеко ли отстоитъ колъ отъ вертикальнаго положенія, можетъ служить слѣдующей инструментъ:
Fig. 8. Должно имѣть четвероугольную доску ABEF, линеею DC раздѣленную точно на двѣ равныя части длиною въ футъ или по долѣ, толщиною такую, чтобъ на боку можно было здѣлать ложбинку aAEa, въ которую бы колья свободно входить могли. Изъ точки D на плоскости AF описать дугу ef, и отъ того мѣста, гдѣ линея DC дугу пересѣкаетъ, раздѣлить дугу какъ въ ту, такъ и другую сторону на градусы. Сверьхъ сего въ точкѣ D на шпилькѣ привѣсить отвѣсъ. Когда такая доска съ двухъ противныхъ между собою сторонъ къ воткнутому колу ложбиною приложится, то по отвѣсу видно будетъ въ вертикальномъ ли колъ положеніи, и сколько отстоитъ отъ вертикальнаго. Ежели наклоненіе его къ горизонту будетъ такъ велико, что чувствительную погрѣшность произвесть можетъ, то должно будетъ поправить, а въ противномъ случаѣ оставить его въ своемъ положеніи.

Примѣчаніе 3.

16) Чтобъ сей образецъ мѣрять линеи былъ способнѣе и вѣрнѣе можно при всякомъ колѣ и развилинкахъ помощію отвѣса испытать разстояніе протянутой веревки отъ поверьхности

сти земной, и наклоненіе кола къ горизонту наблюдая при томъ то, чтобъ помянутыя разстоянія немного разнствовали между собою, потому что мѣряемая линея полагается Горизонтальная. Остается при семъ способѣ одно препятствіе, которое отъ вѣтру послѣдовать можетъ, но отвратить сего другимъ образомъ не возможно, кромѣ того, чтобъ колья вколачивать тверже въ землю. Въ протчемъ вообще о всѣхъ практическихъ дѣйствіяхъ примѣчать надлежитъ, что главное дѣло искуснаго Геодезиста состоитъ въ томъ, чтобъ умѣлъ узнавать, какія погрѣшности при разныхъ обстоятельствахъ отъ разныхъ способовъ произойти могутъ, и чтобъ имѣлъ искусство, какъ бы сказать, оныя цѣнить или мѣрять; чего ни отъ одной теоріи, ни отъ одного упражненія, но отъ обѣихъ вмѣстѣ надѣяться должно.

Примѣчаніе 4.

17) Всѣ тѣла отъ холоду сжимаются, а отъ тепла разпространяются. По сему, изъ какой бы матеріи мѣра ни была здѣлана перемѣнамъ отъ тепла и стужи будетъ подвержена. Опытами изслѣдовано, что всякое дерево, а особливо Американскія дерева меньше перемѣнамъ бываютъ подвержены, нежели самые твердые металлы. Откуду имѣемъ другую причину предпочесть въ мѣряніи деревянные шестики всѣмъ прочимъ мѣрамъ. Когда въ мѣряніи тре-

буется крайняя точность, то надлежитъ въ разсужденiе принимать прибавленiе или убавленiе въ мѣрѣ, которое отъ тепла или холоду произходитъ. Но о томъ разсуждать какъ узнавать на сколько мѣра во время дѣйствiя прибавилась или убавилась, и прибавленiе или убавленiе принимать здѣсь въ разсужденiе нѣтъ нужды. Между тѣмъ не можно преминуть, чтобъ не показать способу какъ находить мѣру будучи въ отдаленномъ мѣстѣ, или когда случится какимъ нибудь образомъ оную потерять.

18) *Отвѣсъ простой* [pendulum simplex] есть малинькой кусочикъ тяжелаго металла на тонинькой ниткѣ или волоскѣ привѣшенной. Напримѣръ, ежели иа одномъ
Fig. концѣ шелчинки CP привязанъ будетъ ма-
9. линькой свинцовой шарикъ, а другимъ концомъ шелчинка прицѣплена будетъ за крючекъ, то CP будетъ простой отвѣсъ. *Длина* отвѣса есть разстоянiе отъ точки C до центра шарика, или когда шарикъ будетъ весьма малъ въ разсужденiи длины CP, то длиною отвѣса можно назвать разстоянiе отъ точки C до шарика. Когда такой отвѣсъ качаться понужденъ будетъ, чтобъ по обѣимъ сторонамъ описывалъ не большiя дуги MP и NP, то движенiе его по дугамъ MP и PN вмѣстѣ взятое называется *размахъ* или *качанiе* [Oscillatio]. О такихъ отвѣсахъ въ Механикѣ доказывается, что ежели ихъ пону-

понудитъ качаться въ безвоздушномъ мѣстѣ по небольшимъ дугамъ, то длины разныхъ отвѣсовъ содержатся между собою обратно какъ квадраты чиселъ размаховъ въ равное время совершившихся, т. е. ежели, отвѣсъ котораго длина $= L$, въ извѣстное время совершаетъ число N размаховъ, а другой, котораго длина $= l$, въ то же время совершаетъ M размаховъ: то будетъ

$$L : l = \frac{1}{NN} : \frac{1}{MM}$$
$$\text{или } L : l = MM : NN.$$

Откуду явствуетъ, изъ данныхъ въ сей пропорціи трехъ терминовъ можно найти четвертой. По опытамъ извѣстно, что отвѣсъ, котораго длина $= 3\frac{1}{6}$ рен: фута, въ одну секунду одинъ размахъ совершаетъ, слѣдовательно въ минуту 60 и въ двѣ 120 совершитъ розмаховъ, и такъ далѣе. Положимъ теперь, что длина отвѣса по произволенію взятаго $= x$, и пусть сей отвѣсъ въ одну минуту совершаетъ 50 розмаховъ, въ двѣ 100 розмаховъ, то длина его въ ренскихъ футахъ найдется посылкою

$$(100)^2 : (120)^2 = 3\frac{1}{6} : x.$$

Откуду произойдетъ $x = \frac{36 \times 19}{25 \times 6} = \frac{6 \times 19}{25} = 4\frac{14}{25}$ ренск: фут: $= 4' \ 6'' \ 8'''$.

По сему можно узнать величину ренскаго фута, потомъ и всѣхъ прочихъ, которыхъ содержаніе къ Парижскому сообщено въ § 3.

19) Не можно сказать, чтоб предложенной способ находить величину какого нибудь фута, был Геометрически вѣрен, потому что отвѣс длиною въ $3\frac{1}{6}$ ренск: фут: въ секунду один размах совершает въ безвоздушном мѣстѣ, какое на полѣ едва имѣть можно, ни часов так аккуратных, которых бы ход был равномѣрен. Потóм по разным от экватора разстояніям, по разному градусу тепла и холоду длина отвѣса въ одну секунду один размах совершающаго перемѣняется. Гдѣ крайняя точность требуется не только сіи, но и другія обстоятельства въ разсужденіе принимать должно. А при размѣряніи пашен и полей выше сего упомянутой способ без всякаго сомненія употребить можно, лишь бы только были часы карманные, которых ход минуты чрез двѣ или три был равномѣрен. Въ протчем, ежели ни каких часов въ готовности не случится, то к к размѣренію времени может служить движеніе крови здороваго человѣка, потому что примѣчено, что въ здоровом человѣкѣ одно біеніе жилы въ одну секунду совершается, или как нѣкоторые утверждают въ одну минуту жила 80 біеній совершает.

Задача 5.

20) *На плоскости описать круг.*

Рѣше-

Рѣшенiе.

Какъ на бумагѣ описывается кругъ, Fig. того развѣ тому не извѣстно, кому цирку- 10. ла видѣть не случалось. На полѣ описывать его не труднѣе. Положимъ, что изъ C радiусомъ CE должно описать кругъ. Въ точкѣ C надлежитъ крѣпко утвердить малинькой колышекъ, и къ нему привязать конецъ веревочки, такъ чтобъ она около его свободно вертеться могла: На другомъ концѣ веревки надобно привязать другой острый колышекъ, въ такомъ разстоянiи, сколь великъ радiусъ данъ будетъ, потомъ натянувши веревку острымъ концемъ на поверьхности земной можно будетъ описать окружность.

Примѣчанiе 1.

21) Для вѣрности, чтобъ при описыванiи окружности колышекъ AD не покривился внутрь или внѣ круга, надлежитъ къ помянутому колышку, которымъ окружность на землѝ означена быть имѣетъ, привязать въ двухъ мѣстахъ веревочку FBD, и къ ней ужѐ отъ кола C веревочку BC, такимъ образомъ, когда колышекъ AD между точками F и D взятъ будетъ, и веревочки натянуты, то онъ при описанiи окружности начальнаго своего положенiя перемѣнить не можетъ.

22)

22) Когда ужѐ извѣстно, какъ описывать дугу на поверьхности земной, какъ проводить и мѣрять прямую линею, то къ рѣшенїю задачь, которыя въ теоретической Геометрїи помощїю линей и круга рѣшены, и на поверьхности земной тѣ же способы употреблять можно. Какъ напримѣръ: *Изъ данныхъ трехъ линей, изъ которыхъ каждая меньше, нежели двѣ протчїя вмѣстѣ взятыя, описать треугольникъ. Съ одного мѣста на другое перенесть данной уголъ. Данной уголъ или линею раздѣлить на двѣ равныя части*, и протчїя симъ подобныя. По сему должны бы теперь слѣдовать задачи, которыя собственно принадлежатъ къ практической Геометрїи. Но сего учинить не можно прежде, нежели сообщено будетъ описанїе и употребленїе инструмента, которымъ углы на полѣ мѣряются.

Примѣчанїе 2.

23) Инструментъ по большей части къ размѣренїю угловъ на полѣ употребляемой называется *Астролябїа* [Astrolabium]. Fig. 11. Много и другихъ къ сему намѣренїю отъ ученыхъ людей изобрѣтено, но я объ оныхъ умолчеваю, потому что астролябїи предъ всѣми протчими въ практической Геометрїи употреляемыми въ точности должно отдать преимущество. Оная состоитъ изъ мѣднаго круга AFBD, котораго окружность раздѣлена

на на 360°, и каждой градусъ, ежели величина окружности дозволяетъ, раздѣляется на четыре и иногда и на шесть равныхъ частей. По сему въ перьвомъ случаѣ каждая часть будетъ въ себѣ содержать 15′, а въ другомъ 10′. По концамъ неподвижнаго поперешника AB, на которой нибудь сторонѣ, дѣлаются гнѣзда или мѣста для дiоптръ, которыя вставливать и снимать можно. На другомъ поперешникѣ FE около центра движущемся для другой подобной пары дiоптръ дѣлаются подобныя мѣста. Въ центрѣ астролябiи для познанiя странъ свѣта на движимомъ поперешникѣ придѣлывается компасъ, чтобъ и онъ вмѣстѣ съ поперешникомъ FE около центра обращаться, и снятъ быть могъ. На третьемъ поперешникѣ DM означается линея DM, которая бы чрезъ точку D, которой на окружности 90° соотвѣтствуютъ, чрезъ центръ астролябiи, и чрезъ точку M, гдѣ 360° означены, проходила. Съ такимъ приборомъ кругъ кладется на троеножную и раздвижную подставку GIKL, которая въ верьху имѣетъ яблоко, чтобъ плоскость астролябiи во всякое положенiе привесть можно было. Въ низу подъ яблокомъ противъ самаго центра астролябiи привѣшивается на ниточкѣ отвѣсъ, которой бы показывалъ на землѣ точку, надъ которою центръ астролябiи стоять долженъ. Въ строенiи яблока и другихъ нѣкоторыхъ частей бываетъ различность, но о семъ говорить

ворить нѣтъ нужды. Чтобъ каждой градусъ на шесть частей или болѣе дѣлить ненужно было, къ концу поперешника, на которомъ движущїяся дїоптры находятся, придѣлывается дуга, которая бы на окружности астролябїи занимала дугу 11°, а сама бы раздѣлена была на 12 равныхъ частей. Сей способъ мѣрять и дѣлить углы называется Нонїй отъ изобрѣтателя, которому имя было Нонїй [Nonius]. Помощїю сей дуги уголъ точно можно вымѣрять даже до 5′ безъ всякаго дѣленїя градусовъ на части. Притчину такой точности и употребленїе лучше можно показать на самомъ дѣлѣ, нежели изъяснить словами.

24) О дїоптрахъ примѣчать надлежитъ: 1) Чтобъ линея чрезъ волосокъ одной дїоптры и узинькую скважину другой проведенная чрезъ самой центръ астролябїи проходила. 2) Что глазомъ смотрѣть должно сквозь дїоптру, въ которой узинькая скважина находится. 3) Что въ дїоптрѣ, въ которой находится вертикальной волосокъ протягивается другой къ прежнему подъ прямымъ угломъ, т. е. горизонтальной, а въ другой дїоптрѣ противъ самой точки, гдѣ волоски себя пересѣкаютъ, дѣлается иногда малинькой кружечикъ. Сїе не мало служить можетъ къ точности въ мѣрянїи угловъ. Потомъ для большей вѣрноти и способности вмѣсто дїоптръ придѣлываются иногда зрительныя трубки.

При-

Примѣчаніе 3.

25) Въ практической Геометріи по большой части мѣряются углы находящіяся на плоскостяхъ горизонтальной и вертикальной. По сему, когда уголъ должно мѣрять на плоскости горизонтальной, то плоскость круга надлежитъ привесть въ горизонтальное, а когда уголъ должно мѣрять на вертикальной плоскости находящейся, то плоскость астролябіи должно привесть въ вертикальное положеніе. Наконецъ когда уголъ OPA на плоскости горизонтальной находящейся мѣрять должно, то астролябію такъ поставить надлежитъ, чтобъ центръ оной прямо стоялъ противъ точки P на землѣ вертикальнымъ коломъ означенной. Понеже отъ помянутыхъ вещей зависитъ точность въ снимании угловъ, то сія матерія требуетъ обстоятельнаго изъясненія. Fig. 12.

Задача 6.

26) *Астролябію такъ поставить, чтобъ центръ оной соотвѣтствовалъ назначенной на поверьхности земной точкѣ.*

Рѣшеніе.

Пусть будетъ означенная на поверьхности земной точка P. Надлежитъ сперьва около точки P радіусомъ, которой долженъ Fig. 12.

быть

быть нѣсколько побольше , нежели радїусъ круга астролябїи , на поверьхности земной описать кругъ ABC , и ношки астролябїи разположить по назначенной окружности , потóмъ то ту , то другую ношку астролябїи втыкая глубже въ землю надлежитъ ихъ привесть въ такое положенїе , чтобъ гирька выше сего упомянутая въ самую средину точки на землѝ означенной падала.

Примѣчанїе.

27) Хотя и упомянуто выше сего , что астролябїю должно такъ ставить , чтобъ центръ ея стоялъ противъ самой точки на землѝ означенной : однакожъ , хотя бы гирька не въ самую точку падала , не большое гирьки отъ точки разстоянїе такой погрѣшности , которую бы въ практикѣ презрѣть не можно было , произвесть не можетъ. Чтобъ сїе
Fig. 126 показать , положимъ что мѣряя астролябїею уголъ ACB центръ астролябїи соотвѣтствуетъ не точкѣ C , но точкѣ D и CD $=\frac{1}{4}$ арш: $=4$ вершк: Такимъ образомъ вмѣсто угла ACB вымѣрянъ будетъ уголъ ADB , которой пусть будетъ $=54^\circ\ 32'$. Сверьхъ сего AC или AD пусть будетъ $=50$ саж: $=150$ арш: $=2400$ вершк: и въ треугольникѣ ADC данъ будетъ уголъ ADC и бока AD и CD , и для того чтобъ опредѣлить прочїе углы должно посылать

AD

$$AD+CD : AD-CD = \text{tang}\tfrac{1}{2}ADB : \text{tang}\tfrac{1}{2}(ACD-DAC)$$

$$l\,\text{tang}\tfrac{1}{2}ADB = 9.7121461$$
$$lAD-CD = 3.3799868$$
$$13.0916329$$
$$lAD+CD = 3.3809345$$
$$l\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(ACD-DAC) = 9.7106984$$

Сему логариѳму найдется въ таблицахъ соотвѣтствующей уголъ 27° 11′ 20″, слѣдовательно уголъ ACB = 54° 27′ 20″, которой отъ истиннаго разнствуетъ 4′ 40″. Толь малой погрѣшности мѣряя уголъ астролябїею, и поставя оную такъ, чтобъ центръ ея стоялъ надъ самою точкою C, едва избѣжать можно. Ежели такъ малая разность происходитъ, когда центръ астролябїи отъ точки C отстоитъ на 4 вершка, то оная еще мѣнше быть должна, ежели центръ ея будетъ отстоять на одинъ только вершокъ. А такой погрѣшности, чтобъ центръ астролябїи отъ точки C отдаленъ былъ на 4 вершка, кто хотя мало въ такихъ дѣйствїяхъ упражнялся, здѣлать не можетъ. Случается иногда, что по неволѣ принуждены бываемъ отступать отъ того мѣста, противъ котораго центръ астролябїи поставить надлежало бы, и по неволѣ мѣряемъ со всѣмъ не тотъ уголъ, которой требуется. Но о семъ ниже сего пространнѣе говорено будетъ.

Задача 7.

28) *Плоскость астролябіи привесть въ горизонтальное положеніе.*

Рѣшеніе.

Для приведенія астролябіи въ горизонтальное положеніе должно имѣть стекляной призьматической сосудъ, и не на полѣ, но въ пристойномъ мѣстѣ, поставя на горизонтальную плоскость, налить въ него воды и кругомъ съ внѣшнихъ сторонъ по бокамъ означить поверьхность ея. Для способности прибавляя воды можно здѣлать большее число подобныхъ, какъ бы сказать, вѣнцовъ. Чтобъ помощію такого ватерпаса узнать въ горизонтальномъ ли положеніи плоскость астролябіи находится, надлежитъ сперьва астролябію по глазомѣру привесть въ горизонтальное положеніе; потомъ сосудъ, наливши въ него воды, поставить на плоскость астролябіи, и смотрѣть сходствуетъ ли, или параллельна ли поверьхность воды съ которымъ нибудь вѣнцомъ. Когда вода съ которымъ нибудь вѣнцомъ будетъ сходствовать, то плоскость астролябіи будетъ дѣйствительно въ желанномъ положеніи, или по крайней мѣрѣ на весьма малой или нечувствительной уголъ отъ онаго отстоять будетъ. А ежели поверьхность воды ни съ которымъ вѣнцомъ ни сходствовать, ни параллельна не

будетъ, то должно по тѣхъ поръ перемѣнять по маленьку положенiе плоскости, пока не приведена будетъ въ вышепомянутое положенiе.

Примѣчанiе.

29) Чтобъ способнѣе вѣнцы на сосудѣ означать можно было, надлежитъ стекляной сосудъ вставить въ деревянной кубъ, и тогда поставя на горизонтальную плоскость вѣнцы означать; такимъ образомъ и употребленiе его здѣлается способнѣе. При размѣренiи полей, пашенъ и урочищъ о горизонтальномъ астролябiи положенiи увѣряются обыкновенно на одномъ глазомѣрѣ. Правда, что хотя астролябiа на одинъ, два или три градуса отъ горизонтальнаго положенiя отстоять будетъ, однакожъ въ мѣрянiи угла такой погрѣшности, которой бы въ подобныхъ случаяхъ презрѣть не можно было, произвесть не можетъ; что видно будетъ изъ ниже слѣдующихъ. Но точность въ мѣрянiи угла не меньше зависитъ и отъ того, чтобъ центръ астролябiи соотвѣтствовалъ точкѣ на землѣ назначенной, откуду видно, что ежели и въ положенiи плоскости, и въ постановленiи центра астролябiи ошибенось будетъ, то напослѣдокъ можетъ въ мѣрянiи угла произойти такая ошибка, которой и въ самыхъ грубыхъ размѣренiяхъ презрѣть не можно; и потому стараться должно, сколько возможно, или

 скольк-

сколько обстоятельства допускаютъ, удовлетворить выше сего помянутымъ требованіямъ.

Задача 8.

30) *Астролябію привесть въ вертикальное положеніе.*

Рѣшеніе.

1) Понеже астролябія ставится въ вертикальное положеніе для мѣрянія угловъ на вертикальной плоскости находящихся, тогда въ компасѣ не бываетъ нужды, и для того стекло и стрѣлку снять должно; и вмѣсто стрѣлки къ шпилкѣ прицѣпить на тонинькой ниточкѣ или волоскѣ малинькой и легинькой шарикъ, чтобъ шпилька не могла покривиться. Потомъ перемѣняя по маленьку положеніе астролябіи должно привесть въ такое, чтобъ нитка или волосокъ съ плоскостью висѣлъ параллельно. Ежели сіе учинено будетъ, то должно почитать, что плоскость астролябіи находится въ вертикальномъ положеніи.

2) Когда астролябію должно такъ поставить, чтобъ не только была въ вертикальномъ положеніи, но и діаметръ, на которомъ неподвижныя діоптры находятся, былъ съ горизонтомъ параллеленъ, то сверьхъ того, что выше сего предписано, астроля-

бію

бїю должно такъ поставить, чтобъ волосокъ закрывалъ линею на неподвижномъ поперешникѣ DM проведенную, или бы падалъ на самое дѣленїе, гдѣ 180° и 360° означаются. Тогда плоскость астролябїи въ вертикальномъ, а дїаметръ съ неподвижными дїоптрами съ горизонтомъ парраллельномъ положенїи находиться будутъ.

Примѣчанїе.

31) бываютъ случаи, что должно мѣрять углы ни на горизонтальной, ни вертикальной плоскости находящїяся, но къ горизонту наклоненной; но о томъ какъ астролябїю при такихъ случаяхъ приводить въ надлежащее положенїе, говорить нѣтъ нужды, потому что нѣтъ для сего другаго способу, какъ примѣняясь къ положенїю плоскости, на которой уголъ находится.

32) Всѣ выше сего, для приведенїя астролябїи въ надлежащее положенїе, предложенные способы съ немалымъ успѣхомъ употреблять можно въ тихую погоду и при умѣренномъ вѣтрѣ. Но ежели вѣтръ будетъ жестокой, то не только упомянутыхъ, но и всѣхъ другихъ погрѣшностей избѣжать не можно. И для того въ такомъ случаѣ лучше трудъ оставить до другаго времени, нежели на ненадежныя и сомнительныя размѣренїя полагаться.

Задача 9.

33) *Вымѣрять уголъ OPQ на горизонтальной плоскости находящейся.*

Рѣшенїе.

Fig. 12. Когда мѣста O и Q не очень далеко отстоятъ отъ означенной точки P, то въ точкахъ O и Q надлежитъ поставить по вертикальному колу. Потомъ астролябїю должно такъ поставить, чтобъ центръ ея соотвѣтствовалъ точкѣ P, плоскость ея по глазомѣру поставя въ горизонтальномъ положенїи, и обращая кругъ астролябїи надлежитъ неподвижныя дїоптры навесть на одинъ колъ, а подвижныя на другой. Потомъ предписаннымъ выше сего образомъ изслѣдовать, точно ли въ горизонтальномъ положенїи плоскость астролябїи находится. Ежели будетъ не въ горизонтальномъ, то должно поправлять по тѣхъ поръ, пока не приведена будетъ въ надлежащее положенїе, или по крайнѣй мѣрѣ, чтобъ отъ горизонтальнаго на весьма малой уголъ отстояла. Тогда, ежели дїоптры прежнее свое положенїе въ разсужденїи коловъ O и P перемѣнятъ, навесть ихъ снова на колья, число градусовъ и минутъ на окружности круга щитая отъ дїоптры на одинъ наведенной до дїоптры на другой колъ наведенной покажетъ величину угла.

Примѣ-

Примѣчанïе.

34) рѣдко случается въ практикѣ, чтобъ колья O и Q такъ близко отъ точки P отстояли, чтобъ простымъ глазомъ видѣть можно было. Отмѣнной остроты глазъ быть долженъ, чтобъ въ разстоянïи 80, 100 или 120 саж: Геометрической колъ ясно виденъ былъ. Сïе обстоятельство принуждаетъ иногда вмѣсто кольевъ въ точкахъ O и Q ставить какïе нибудь большïе знаки, которые и ту пользу приносятъ, что отъ вѣтру не скоро положенïе свое перемѣнить могутъ. Въ такомъ случаѣ, когда для способности поставленъ будетъ въ точкѣ O большой знакъ, и вымѣрявъ уголъ P должно будетъ перейти на мѣсто O, чтобъ вымѣрять уголъ POQ, то ни надъ точкою O, ни надъ тою, на которую дïоптры наведены были, центра астролябïи поставить будетъ не возможно, развѣ знакъ со всѣмъ срыть, которой опять, когда перейдешь намѣсто Q, занадобится; откуду явствуетъ, что и въ простой практической Геометрïи могутъ быть случаи, при которыхъ надъ означенною на землѣ точкою центра астролябïи поставить не можно. Какъ вымѣрянной уголъ поправлять ниже сего говорено будетъ. Точка, надъ которою центръ астролябïи поставленъ быть долженъ, для краткости названъ быть можетъ *центръ мѣста* [centrum ſtationis].

ЗАДАЧА 10.

35) *Вымѣрять уголъ на вертикальной плоскости находящейся.*

Рѣшенiе.

Надлежитъ сперьва по глазомѣру плоскость астролябiи привесть въ вертикальное положенiе, дiоптры на неподвижномъ поперешникѣ находящiяся съ горизонтомъ параллельное, а движущiяся дiоптры навесть на данную въ верьху точку. Потомъ по предписанному въ § 30 способу испытать, точно ли въ желанномъ положенiи плоскость астролябiи находится, и положенiе ея исправить. Тогда, ежели сквозь движущiяся дiоптры, точки, на которую прежде были наведены, невидно будетъ, то опять ихъ навесть должно: Число градусовъ и минутъ на окружности щитая отъ неподвижныхъ до подвижныхъ дiоптръ покажетъ величину угла.

Примѣчанiе.

36) Кто въ практикѣ упражнялся, тому довольно извѣстно, сколь трудно сыскать такой инструментъ, въ которомъ бы раздѣленiе окружности никакой погрѣшности не было подвержено, и для того не безполезно будетъ, всегда испытывать, вѣрно ли раздѣленiе здѣлано. На сей конецъ надлежитъ

выбрать

выбрать три мѣста на горизонтѣ O, P, Q, чтобъ изъ каждаго два прочіе видны были, и въ нихъ поставить знаки, потомъ помощію инструмента горизонтально поставленнаго вымѣрять углы O, P, Q, и ежели сумма ихъ будетъ 180°, то будетъ значить, что раздѣленіе окружности здѣлано аккуратно. Тожъ можно учинить, ежели вмѣсто треугольника употребленъ будетъ многоугольникъ какой нибудь, и вымѣрять всѣ углы около себя на горизонтѣ находящіеся. Ежели сумма всѣхъ будетъ 360°, то раздѣленіе здѣлано вѣрно. Подобной способъ можно употребить для повѣренія угла 90°, 36°, 30° и всякаго другаго, которой происходитъ отъ дѣленія 360 градусовъ на какое нибудь цѣлое число, какъ напримѣръ: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ и проч: и опредѣлить ошибку въ дѣленіи. Ежели ошибка въ цѣлой окружности не будетъ превышать нѣсколько минутъ, какъ напримѣръ 5′ 6′ или 8′, то въ практикѣ какъ при размѣреніи пашенъ, полей, въ сниманіи плановъ, сію погрѣшность не поправляя мѣряемыхъ угловъ презрѣть можно.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

СОДЕРЖАЩАЯ РѢШЕНІЯ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЬ, О КОТОРЫХЪ ВЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ НИЧЕГО НЕ УПОМЯНУТО.

Задача 11.

37) *Изъ данныхъ двухъ боковъ и угла, которой между ими содержаться долженъ, описать треугольникъ.*

Рѣшеніе.

Fig. 14 Пусть даны будутъ линеи E и F уголъ DCE. На линеѣ AM отсѣки линею AB равную линеѣ E, и на концѣ A поставь уголъ DAe равной углу DCE, потомъ на продолженной Ad отсѣки AC=F, точки B и C соедини прямою линеею, произойдетъ требуемой треугольникъ ACB.

Задача 12.

38) *Ежели дана линея AB и два угла cAb и cBa, которые при концахъ данной линеи стоять должны, описать треугольникъ.*

Рѣшеніе.

Одинъ изъ данныхъ угловъ поставь на одномъ концѣ данной линеи, а другой на другомъ, потомъ бока Ac и Bc продолжи по тѣхъ мѣстъ, пока не соединятся въ точкѣ C, произшедшей треугольникъ ACB будетъ требуемой.

Зада-

Задача 13.

39) *На данной линѣ описать квадратъ.*

Рѣшенiе.

Пусть будетъ данная линея AB, по концамъ линеи AB поставь перпендикулярныя линеи AC и BD, и отсѣки AC=BD=AB, точки C и D соедини линеею CD фигура ABCD будетъ требуемой квадратъ.

Доказательство.

Понеже углы A и B прямые, то линея AC будетъ параллельна линѣ BD, AC =BD и углы A и B прямые: Потóмъ CD параллельна и равна динѣ AB, углы C и D также прямые. Откуду видно, что въ фигурѣ начерченной ABCD всѣ бока равны между собою, и всѣ углы прямые.

Примѣчанiе.

40) Изъ рѣшенiя предъидущей задачи явствуетъ, коимъ образомъ изъ данныхъ двухъ линей описывать должно четвероугольникъ прямоугольной, и изъ данной линеи и угла начертить ромбъ.

Задача 14.

41) *Данному треугольнику начертить равной квадратъ.*

Рѣше-

Рѣшенїе.

Fig. 17. Пусть будетъ треугольникъ ACB, высоту треугольника CP раздѣли на двѣ равныя части, и половину оной перенеси на продолженное основанїе AB, такъ чтобъ было $AE = AB + \frac{1}{2}CP$. На линеѣ AE опиши полукруга AFE, и изъ точки B возвысь перпендикулярную линею BF, которая будетъ бокъ искомаго квадрата; и по сему, ежели на линеѣ BF описать квадратъ, то онъ будетъ равенъ треугольнику.

Доказательство.

Площадь треугольника находится, ежели основанїе умножено будетъ на половину высоты (§ 179 Геом:); слѣдовательно площадь треугольника $ABC = \frac{1}{2}CP \times AB = BE \times AB$. Но BF есть средняя пропорцїональная линея между AB и BE (169 Геом:); слѣдовательно будетъ $BF^2 = AB \times BE = \frac{1}{2}CP \times AB$, то есть квадратъ на линеѣ BF написанной равенъ треугольнику ACB.

Примѣчанїе.

42) Изъ рѣшенїя предъидущей задачи явствуетъ, что подобнымъ образомъ четвероугольнику прямоугольному и ромбу равной квадратъ описать можно, въ томъ только разность состоитъ, что вмѣсто половины высоты должно къ основанїю присово-

купить

купить цѣлую. Но ежели фигурѣ какой нибудь регулярной или нерегулярной, и притомъ многоугольной должно описать равной квадратъ, то сперьва фигуру должно раздѣлить на треугольники, и всѣмъ треугольникамъ фигуру составляющимъ здѣлать одинъ равной, или данной фигурѣ уменьшая число боковъ здѣлать равной треугольникъ, а потомъ уже произшедшему треугольнику начертить равной квадратъ, какъ здѣсь показано.

43) Имѣя способъ всякой фигурѣ прямоугольной описывать равной квадратъ, порядокъ требуетъ, чтобъ искать способу описать кругу равной квадратъ, потому что и кругъ принадлежитъ къ простой Геометріи. Сія задача у Геометровъ подъ именемъ *квадратуры круга* [Quadratura circuli] извѣстна. Въ Геометріи доказано, что площадь круга равна треугольнику, котораго основаніе равно окружности круга, а высота радіусу, или равна четвереугольнику прямоугольному, котораго основаніе равно полуокружности, а высота радіусу. И такъ, чтобъ найти квадратъ, котораго бы площадь равна была площади круга, надлежитъ между полуокружностію и радіусомъ сыскать среднюю пропорціональную линею. Откуду явствуетъ, что надлежитъ напередъ опредѣлить прямую линею, которая бы равна была

п

даны только содержанія діаметра къ окружности, а не показанъ способъ, какъ до онаго дойти можно, то здѣсь сіе присовокупить будетъ не непристойно.

Fig. 18. 44) Изъ § 38 Тригонометріи явствуетъ, коимъ образомъ изъ даннаго радіуса и хорды MN дугѣ MAN соотвѣтствующей, находить должно хорду дуги AM, которая вдвое меньше прежней. Когда дана хорда MN, то извѣстна будетъ и ея половина или синусъ дуги AM, откуду по Пиѳагоровой теоремѣ можно будетъ найти $PC = \sqrt{(MC^2 - MP^2)}$, а потомъ и AP ежели изъ AC вычтется PC. Нашедъ AP и зная MP по Пиѳагоровой же теоремѣ найдется $AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)}$, или когда AP ужѐ найдена изъ подобныхъ треугольниковъ AMP и AMD произойдетъ $AD : AM = AM : AP$, откуду $AM^2 = AD \times AP = 2AC \times AP$ и $AM = \sqrt{2AC \times AP}$.

45) Положимъ, что радіусъ круга $AC = 1$, и что въ кругѣ описанъ шестіугольникъ регулярной, то найдется

$MP = 0,5$ $AP = 0,133974596$.

Потомъ въ фигурѣ регулярной о 12 бокахъ

$MP = 0,2588190451$ $AP = 0,0340741737$.

въ фигурѣ регулярной о 24 бокахъ

$MP = 0,1305261922$ $AP = 0,0085551386$.

въ фигурѣ регулярной о 48 бокахъ

MP = 0,065403129 2 AP = 0,0021410768.

въ фигурѣ регулярной о 96 бокахъ

MP = 0,032719082 AP = 0,0005354125.

Теорема I.

46) *Въ четвероугольникѣ прямоугольномъ, котораго длина много болѣе, нежели ширина, ежели изъ точки* F *за центръ взятой опишется полукружїе* BHGC, *и проведется прямая линея* GI *паралельная боку* AB, *потомъ къ четвероугольнику приложенъ будетъ бокомъ парраллелепипедъ* BE *какой нибудь ширины, и разрѣзанъ будетъ чрезъ* GI *плоскостью* KGI *паралельною боку* CE, *и чрезъ дугу* GC *поверьхностью прямого цилиндра, котораго основанїе падаетъ на* BHGC, *а центръ основанїя на* F, *то тѣло* KGCE *плоскостїю цилиндрическою отсѣченное будетъ меньше третей части параллелепипеда* IE, *и разность между ими тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ* CD *будетъ меньше; и наконецъ, когда* CD *изчезать станетъ, то и разность изчезнетъ.* Fig. 19.

Доказательство.

На плоскости AE протянутой начерти четвероугольникъ LM равной четвероугольнику GE, которой пусть будетъ основанїе пирамиды LMN, а высота ея MNDC. = DC

разсѣ-

2) 0,51763/0,25881
2

вазсѣки параллелепипедъ и пирамиду плоскостью параллельною основанiямъ AE и LM, и произойдетъ въ параллелепипедѣ разрѣсъ OPQ=ADE тѣла KGCE разрѣсъ VQ, а разрѣсъ пирамиды RT, и будетъ $CD^2 = DH \times DG$, $CP^2 = PX \times PV$ (§ 169 Геом:), откуду

$$CD^2 : CP^2 = DH \times DG : PX \times PV.$$

и понеже DE=PQ, то будетъ

$$DG : PV = \text{четв. } GE : \text{четв. } VQ$$

и по сему $CD^2 : CP^2 = DH \times GE : PX \times VQ$, а понеже CD=MN, и CP=NT, то будетъ

$$MN^2 : NT^2 = DH \times GE : PX \times VQ$$

Но изъ свойства пирамиды слѣдуетъ, что

$$MN^2 : NT^2 = LM : RT, \text{ то будетъ}$$

$$LM : RT = DH \times GE : PX \times VQ = GE : \frac{PX \times VQ}{DH}$$

Но LM=GE, то будетъ и $RT = \frac{PX \times VQ}{DH}$ то есть

$$DH : PX = VQ : RT.$$

А понеже DH меньше, нежели PX, то и разрѣсъ VQ будетъ меньше, нежели RT: и разность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ меньше при томъ же дiаметрѣ будетъ CD, потому что ежели CD меньше и меньше взята будетъ, то наконецъ какъ PX такъ и DH будутъ почти дiаметру равны. Отсюду слѣдуетъ, что и тѣло KGCE равнымъ образомъ будетъ меньше пирамиды (§ 245 Геом:). Но пирамида LMN равна третьей части призьмы IE (§ 267 Геом:), то и тѣло KGCE будетъ равнымъ образомъ меньше третьей части призьмы IE.

Тео-

Теорема 2.

47) *Сегментъ круга* agca *больше, нежели двѣ трети прямоугольника* abdg, *котораго основанїе равно хордѣ сегмента, а высота* ab *равна высотѣ сегмента* ci, *но разность между ими тѣмъ меньше будетъ, чѣмъ меньше сегментъ: и наконецъ разности между ими никакой не будетъ, когда сегментъ такъ будетъ малъ, что предъ цѣлымъ кругомъ за ничто почесться можетъ.* Fig. 20.

Доказательство.

Пусть будетъ часть фигуры cdgi та же самая съ фигурою CDGI прежней теоремы. И понеже тѣла KGCE и IE, когда фигуры GCD и DI возмутся за основанїя, будутъ изъ роду призьмъ, и имѣть одинакую высоту, то тѣло KGCE будетъ содержаться къ тѣлу IE, такъ какъ основанїе GCE къ основанїю DI. Но понеже тѣло KGCE не многимъ меньше третьей части тѣла IE, то и GCD должно быть не многимъ меньше третьей части четвероугольника ID, и потому GIC немногимъ больше двухъ третей того же четвероугольника; слѣдовательно acga малымъ чѣмъ побольше двухъ третей четвероугольника abdg.

Примѣчанiе.

48) Отсюду происходитъ способъ находить площади сегментовъ и секторовъ, хотя не со всѣмъ аккуратной, но отъ истиннаго весьма мало разнствующей. Пусть будетъ секторъ MCN весьма малой. Хорда MN
Fig. 21. къ радiусу AC перпендикулярная. Четвероугольника площадь, котораго основанiе MN, а высота AP будетъ $= MN \times AP = 2 MP \times AP$. Отсюду презрѣвъ малую погрѣшность площадь сегмента MAN будетъ $= \frac{2}{3} \times 2 MP \times AP = \frac{4}{3} MP \times AP$. А понеже площадь треугольника $MCN = CP . MP$, то площадь сектора $NCM = \frac{4}{3} MP . AP + MP \times CP = MP(\frac{4}{3} AP + CP)$. Но $\frac{4}{3} AP + CP = \frac{1}{3} AP + AP + PC = \frac{1}{3} AP + AC$. Слѣдовательно площадь сектора MCN будетъ почти $= MP(\frac{1}{3} AP + AC)$ и погрѣшность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ секторъ будетъ меньше.

Задача 15.

49) *Найти квадратъ равной кругу, или содержанiе площади круга къ квадрату дiаметра своего.*

Рѣшенiе.

Раздѣли кругъ на 96 секторовъ, и будетъ MN бокъ фигуры девяносто шести угольной въ кругѣ написанной. Отсюду положивъ

ложивъ AC=1, по § 45 будетъ MP= 0,0327190828, AP=0,00053541, $\frac{1}{3}$AP= 0,00017847, $\frac{1}{3}$AP+AC=1,00017847 и MP ($\frac{1}{3}$AP+AC)=0,0327190828×1,00017847.

0,03	27190828
1,	00017847
22	90335796
130	8763312
2617	526624
22903	35796
32719	0828
327190828	
0,0327249221	5 = площади сектора.

Которая ежели на 96 умножится, произойдетъ площадь цѣлаго круга =3,141592. Слѣдовательно квадратъ радїуса содержаться будетъ къ площади круга =1:3,141592, и квадратъ дїаметра къ площади круга =4:3,141592.=1:0,785398=100000:78539.

Слѣдствїе.

50) Понеже площадь круга равна треугольнику, котораго основанїе равно окружности круга, а высота радїусу, или четвероугольнику, котораго основанїе равно полуокружности круга, а высота радїусу (§ 187 Геом:), то квадратъ радїуса содержаться будетъ къ площади круга, такъ

какъ

какъ радїусъ къ половинѣ окружности. Слѣдовательно радїусъ къ половинѣ окружности или дїаметръ къ цѣлой окружности почти $=1:3,141592=1000000:3141592$, или меньшими числами $100:314$.

Примѣчанїе.

51) Ежели бы кругъ раздѣленъ былъ на большое число секторовъ, то бы искомое содержанїе точнѣе получить можно было. Хотя въ Геометрїи и даны правила, какъ изъ даннаго дїаметра находить окружность и площадь круга, и обратно; однакожъ примѣрами не изъяснены; положимъ, что данъ кругъ, котораго дїаметръ 113″, то окружность найдется чрезъ посылку.

$$1000000:3141592=113:Q$$

```
          3141592
              113
          -------
          9424779
         3141592
        3141592
       ---------
1000000) 354999896 (354,999896 = Q или по-
                                (чти 355″
```

И сїе есть содержанїе Мецїево. Когда окружность извѣстна, площадь круга произойдетъ, ежели она умножится на четвертую часть дїаметра, то есть $\frac{113}{4}$ $355=10028''\frac{3}{4}$ квадр: А понеже квадратъ дїаметра $(113)^2=12769$; то будетъ квадратъ дїаметра къ площади

круга

круга по Мецiевой пропорцiи $= 12769 : 10028\frac{3}{41}$ $= 452 : 355$. Откуду явствуетъ, что когда данъ дiаметръ круга, которой пусть будетъ $= D$, то площадь онаго найдется посылая $1000 : 785$ или $452 : 355 = DD$ къ четвертому пропорцiональному, которое будетъ искомая площадь.

52) Ежели дана будетъ площадь круга, то сперьва квадратъ дiаметра найдется посылая $785 : 1000$ или $355 : 452$, такъ данная площадь круга къ четвертому пропорцiональному, которое будетъ квадратъ дiаметра, и ежели изъ найденнаго числа извлечешь корень квадратной, найдется самой дiаметръ. Пусть будетъ площадь круга 24 61 16″ квадр: квадратъ дiаметра найдется посылкою.

$$785 : 1000 = 246116 : Q = \frac{246116 \times 1000}{785} = 313600$$ 313523.

и самой дiаметръ будетъ $\sqrt{313600} = 560'' = 56'$.

53) Чтобъ сiе изъяснить примѣромъ важнымъ и полезнымъ, присовокуплю здѣсь изчисленiе дiаметра земнаго, поверьхности и толщины земли. Изъ Парижской Академiи посыланные члены къ экватору и сѣверному полюсу нашли, что одинъ градусъ меридiана около экватора содержитъ въ себѣ 56749 тоазовъ или 340494 Пар: футовъ, Градусъ меридiана около сѣвернаго полярнаго круга содержитъ въ себѣ 57437 тоазовъ или 344622 футовъ, а около Парижа

 гра-

градусъ меридїана содержитъ въ себѣ 57183 тоазовъ или 343098 Парижск: футовъ. Откуду видно, что земля несовершенно сферическую фигуру имѣетъ. Мы для способности положимъ, что она совершенной шаръ, и градусу меридїана сообщимъ посредственную величину, то есть 343098 Пар: фут: Чтобъ найти, сколько градусъ содержитъ въ себѣ Аглинскихъ футовъ по § 5 должно посылать

```
1351 : 1440 = 343098 : Q
                1440
              -------
             1372392
            1372392
            343098
          ---------
  1351 ) 494061120 ( 365700+
          4053
          ----
           8876
           8106
           ----
            7701
            6755
            ----
             9461
             9457
             ----
                4
```

По сему градусъ земной содержитъ въ себѣ 365700 + Агл: футовъ, а саженей руских 52242; и такъ на одну минуту градуса земнаго достанется $870\frac{2}{3}$ саж: а на одну секунду $14\frac{1}{2}$ саж: Когда столько саженей одинъ

одинъ градусъ въ себѣ содержитъ, окружность круга чрезъ полюсы проходящаго, или полагая, что земля совершенной шаръ, окружность экватора будетъ $=360\times52242=$ 1880812 саж: или $3761\frac{1}{4}$ верстъ. Опредѣливъ окружность экватора дїаметръ земной найдется посылкою

$$355 : 113 = 37616\frac{1}{4} : Q$$

```
                113
             ------
             112848
             37616
            37616
         ----------
355 ) 4250636 ( 11974
      355
      ---
       700
       355
       ---
       3456
       3195
       ----
        2619
        2485
        ----
         1286
```

И такъ дїаметръ земной будетъ 11974 версты. Когда дїаметръ и окружность экватора извѣстны, то поверьхность шара земнаго произойдетъ, ежели площадь помянутаго круга умножится на 4 (§ 277 Геом:); а понеже дїаметръ экватора $=11974$, и окружность его $37616\frac{1}{4}$, то площадь будетъ $=\frac{11974}{4}\times37616\frac{1}{4}$ квадр: верстъ, а поверьхность шара земнаго $=11974\times37616\frac{1}{4}$.

$$
\begin{array}{r}
37616\frac{1}{4} \\
11974 \\
\hline
150464 \\
263312 \\
338544 \\
37616 \\
37616 \\
\hline
450413984 \\
2993\frac{1}{2} \\
\hline
450416977\frac{1}{2}
\end{array}
$$
квадр: верстъ.

Откуду толщина шара земнаго (§ 276 Геом:) будетъ $= \frac{2}{3} \times 11974 \times \frac{11974}{4} \times 37616\frac{1}{4} = \frac{1}{6} 11974 \times 450416977\frac{1}{2} = 898882147099\frac{1}{2}$ куб: верст:

54) Въ геометрiи упомянуто, что не всякой полигонъ въ кругѣ Геометрическимъ образомъ описать можно, и предложенъ Механической способъ, какъ описывать въ кругѣ и около круга всякой полигонъ не зная величины бока. Здѣсь присовокуплю способъ нашедши величину бока описывать полигонъ регулярной.

Задача 16.

55) *Въ данномъ кругѣ описать многоугольникъ регулярной.*

Рѣше-

Рѣшеніе.

Положимъ какъ въ Тригонометріи, что радіусъ раздѣленъ на 1000000 частей. Въ таблицахъ синусовъ и тангенсовъ возьми синусъ угла, которой произойдетъ, когда 180° раздѣлишь на число боковъ многоугольника, или 360° на число боковъ дважды взятое, которой ежели удвоится, то будетъ бокъ многоугольника, которой въ кругѣ описать должно, начертивши многоугольникъ въ кругѣ, и около круга такой же многоугольникъ описать будетъ можно.

Примѣчаніе.

56) Ежели радіусъ круга, въ которомъ многоугольникъ начертить должно, данъ будетъ въ какой нибудь мѣрѣ, то бокъ многоугольника въ той же мѣрѣ найдется по тройному правилу. Пусть въ кругѣ, котораго радіусъ = 15'' Геом: должно описать пятиугольникъ. Когда бы радіусъ былъ 1000000, то бы бокъ пятиугольника былъ = 117656, и потому можно посылать

$$1000000 : 15 = 117656 : Q$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 588280 \\ 117656 \\ \hline \end{array}$$

$$1000000)\ 1764840\ (17''\ 6'''\ 4^{IV}\ 8^{V}\ 4^{VI}$$

или, ежели малыя частицы отбросить, то искомой бокъ будетъ 17′′ 6′′′ по той же мѣрѣ, въ которой радїусъ данъ.

57) Когда на данной линеѣ должно описать многоугольникъ, то надлежитъ напередъ сыскать радїусъ въ той же мѣрѣ, въ которой линея дается. Чтобъ сїе учинить, надлежитъ 180° раздѣлить на число боковъ, и произойдетъ половина угла при центрѣ, которому въ таблицахъ синусовъ и тангенсовъ соотвѣтствующей синусъ, ежели удвоится, будетъ бокъ фигуры въ кругѣ, котораго радїусъ = 1000000. Потомъ ежели многоугольникъ долженъ быть о пяти бокахъ, и величина бока будетъ 12′′, то радїусъ круга въ той же мѣрѣ посылкою

117656 : 1000000 = 12 : Q

12

117656) 12000000 (10′′ 1′′′ 9′′′′ рад. искомой

которымъ ежели опишется кругъ, или на данной линеѣ поставишь треугольникъ равнобокой, котораго бы бока были равны найденному радїусу, и изъ верьху треугольника опишешь кругъ, то данной бокъ пять разъ по окружности умѣстится.

ГЛАВА

ГЛАВА 3.

О СЛУЧАЮЩИХСЯ ВЪ ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ ЗАДАЧАХЪ.

Задача 17.

58) *Найти разстояніе двухъ мѣстъ между собою, изъ которыхъ отъ одного къ другому прямой линеи провесть не можно.* Fig. 22.

Рѣшеніе.

Пусть будутъ мѣста A и B, между которыми лежитъ болото или гора, которая препятствуетъ отъ одного мѣста къ другому провесть прямую линею: Выбери третіе мѣсто C, отъ котораго бы къ обѣимъ можно было провесть и вымѣрять прямыя линеи AC и CB, вымѣрявъ AC и CB продолжи ихъ чрезъ C далѣе, пока не будетъ CE = AC, CD = CB. Линея DE будетъ равна искомому разстоянію AB.

Доказательство.

Понеже углы на крестъ ACB и ECD равны между собою, линея AC = линеѣ CE, и CB = CD, то и треугольникъ ACB будетъ равенъ треугольнику CDE (§ 40). Слѣдовательно линея DE = линеѣ AB.

Другое

Другое Рѣшенїе.

Вымѣрявъ линеи AC и CB, вымѣряй инструментомъ выше сего описаннымъ уголъ ACB, потомъ по § 52 Триг: посылай.

$AC+CB : AC-CB = \text{tang} \frac{1}{2} (B+A) : \text{tang} \frac{1}{2} (B-A)$

Нашедъ углы A и B по Тригонометрїи § 47 можно будетъ найти и бокъ AB.

Задача 18.

59) *Найти взаимное разстоянїе двухъ мѣстъ, изъ которыхъ къ одному подойти не можно.*

Рѣшенїе.

Fig. 23. Пусть будутъ мѣста A и B, изъ которыхъ одно B стоитъ за рѣкою. Отъ A смотря чрезъ дїоптры къ B замѣть точку F. гдѣ соединяющая линея AB берегъ пересѣчетъ. Потомъ, подъ какимъ нибудь угломъ, проведи прямую линею AD, на которой возьми CD=AC и смотря отъ C къ B назначь на поверьхности земной прямую линею BCE, которая соединяетъ точку C и мѣсто B, отъ F чрезъ C проведи линею FG и возьми CG=FH. На конецъ чрезъ точки D и G проведи линею DG пока не пересѣчетъ линеи BCE, линея DE будетъ искомое разстоянїе.

Доказа-

Доказательство.

Въ треугольникахъ AFC и CDG линея AC = линеѣ CD. Линея FC = линеѣ CG и углы на крестъ ACF и DCG, также равны между собою, то будетъ уголъ A = углу D линея DG = линеѣ AF. (§ 42 Геом:) Потомъ въ треугольникахъ ACB и CED, сверьхъ того, что AC = CD, уголъ A = углу D и углы на крестъ ACB и DCE равны между собою слѣдовательно будетъ и линея ED = линеѣ AB.

Другое Рѣшеніе.

Выбравъ мѣсто C вымѣряй линею AC, и уголъ ACB, потомъ перейди на A, и вымѣряй уголъ BAC, тогда будетъ извѣстенъ и уголъ ABC, и найдется AB чрезъ посылку.

$$\sin ABC : \sin ACB = AC : AB$$

Примѣчаніе.

60) Ежели бы точка B былъ самой берегъ рѣки, тобъ DE было разстояніе онаго отъ точки A, изъ котораго, ежели вычесть AF, останется ширина рѣки, откуду явствуетъ какъ находить ширину рѣки, и разстояніе мѣста за рѣкою стоящаго отъ берегу рѣки, или разстояніе корабля отъ ерегу.

61) Ежели случится проводя линею OA дойти до болота или сему подобнаго, такъ
Fig. что далѣе линей OA вести не возможно, и за
24. лѣсомъ или другимъ чѣмъ по другую сторону ничего видѣть не можно: то по предъидущей задачѣ не проводя линеи AX можно обошедъ болото найти точку X, которая упадетъ на продолженную линею OAX, и длину линей AX. Надлежитъ отъ точки A поворотить въ сторону и провесть линею подъ какимъ нибудь, но извѣстнымъ угломъ CAB по тѣхъ поръ, пока изъ точки B не видна будетъ сторона X, куда линея протянута быть должна, и линею AB вымѣрять: Потомъ отъ точки B поворотить въ сторону X и уголъ ABX вымѣрять. Такимъ образомъ въ треугольникѣ ABX извѣстны будутъ углы и линея AB, и для того можно будетъ найти, сколь велико разстояніе BX быть должно, чтобъ точко X упала на линею OAX, а потомъ и длину линей AX найти будетъ можно. Ежели точку B очень далеко проводить должно, чтобъ сторона X видна была, то можно учинить большее число поворотовъ. Какъ напримѣръ въ C и D, и при всякомъ поворотѣ углы мѣрять ACD и CDX, въ такомъ случаѣ когда два поворота учинено будетъ, то въ треугольникѣ ACD, извѣстны будутъ бока AC и CD и уголъ ACD, и потому линею AD и углы CDA опредѣлить будетъ можно. А понеже углы CAX и CDX даны, то извѣстны будутъ и углы DAX и

ADX,

ADX, и потому изъ треугольника ADX можно будетъ опредѣлить сколь велика должна быть линея DX подъ угломъ CDX проведенная, чтобъ точка X упала на прямую линею OAX, а наконецъ и длину линей AX изъ тогожъ треугольника опредѣлить можно.

Задача 19.

62) *Найти разстоянїе двухъ мѣстъ между собою, изъ которыхъ ни къ одному подойти не возможно.*

Рѣшенїе.

Пусть будутъ за рѣкою мѣста A и B. Выбери третїе C изъ которыхъ бы оба прежнїя видны были. Изъ мѣста C смотря сквозь дїоптры на A и B назначь линею BCK, на которой лежатъ мѣста B и C, потомъ назначь и ACL, на которой лежатъ A и C. Чрезъ точку C проведи линею DE, и отсѣки по обѣимъ сторонамъ CD=CE. Изъ точки D смотря сквозь дїоптры, замѣть гдѣ прямая линея соединяющая точки A и D берегъ пересѣчетъ, тожъ должно учинить смотря отъ E къ B, и изъ замѣченныхъ мѣстъ F и G провесть линеи FI и GH такъ чтобъ было FC=CI и CH=CG. Потомъ чрезъ точки D и H проведи прямую линею DK, пока не пересѣчетъ продолженной линеи CK, и чрезъ точки E и F проведи EL, пока не пересѣчетъ

Fig. 25.

четъ продолженной CL. На конецъ точки K и L соедини линеею KL, которая будетъ =AB.

Доказательство.

Изъ § 59 явствуетъ, что AC должно быть =CL, и CK=CB; сверьхъ сего углы на крестъ ACB и KCL равны между собою слѣдовательно треугольникъ ACB= треугольнику KCL (§ 42 Геом.) N KC=AB.

Другое рѣшеніе.

Fig. 26 Выбери мѣсто C, изъ котораго бы видны были заданныя мѣста, и чрезъ C проведи линею DE, изъ C смотря на A и B вымѣряй ACD ACB и BCE, перешедъ на мѣсто D вымѣряй уголъ ADC, и такъ въ треугольникѣ ADC даны будутъ два угла и линея DC, слѣдовательно линею AC опредѣлить можно (§ 46 Триг). Тожъ должно учинить и съ другой стороны, вымѣрять углы BCE и BEC изъ треугольника BCE найти линею BC. Когда найдены будутъ линей AC и BC, и уголъ ACB вымѣрянъ, то найдется и бокъ AB (§ 52.53 Триг:).

Примѣчаніе.

63) Выкладокъ по логарифмамъ здѣсь не прилагаю для того, что всѣ сіи случай изъяснены

яснены примѣрами въ тригонометріи. Теперь остается опредѣлить, которой изъ сихъ способовъ съ большею аккуратностію и способностію употреблять можно. Должно думать, что имѣя твердую и постоянную мѣру, всякое разстояніе, такъ аккуратно вымѣрять можно, что большей точности требовать не возможно, ежели только не воспрепятствуютъ неравности на поверьхности земной находящіяся. А въ сниманіи угловъ предложеннымъ инструментомъ не только на нѣсколько секундъ, но и въ минутахъ ошибиться можно. Но съ другой стороны тотъ же уголъ для повѣренія способнѣе можно вымѣрять другой разъ или третей, нежели линею, и рѣдко случаются такія мѣста, на которыхъ бы никакихъ неравностей не находилось, и чтобъ положеніе мѣста дозволяло протягивать, сколько потребно линеи. По сему первьвому способу должно предпочесть второй. И вообще о всѣхъ практическихъ дѣйствіяхъ примѣчать надлежитъ, что способнѣе и точнѣе изъ данныхъ потребныхъ линей и угловъ, другія линеи и углы опредѣлять по выкладкамъ, нежели находить размѣреніемъ.

64) Во всѣхъ предъидущихъ задачахъ мѣсто C зависитъ отъ произволенія, слѣдовательно и уголъ ACB: и понеже какойбы величиною уголъ ACB выбранъ ни былъ, въ мѣряніи онаго равную погрѣшность, или отъ неисправности инструмента,

 кото-

которымъ углы мѣряются, или отъ другихъ какихъ нибудь обстоятельствъ учинить можно; то надлежитъ выбирать углы, которые отъ нашей воли зависятъ, дабы ошибка въ ономъ самую малую погрѣшность въ искомомъ разстоянiи производила. Чтобъ сiе изъяснить, положимъ что въ § 59 мѣсто
Fig. C такъ выбрано, что уголъ ACB найденъ 55°
27. 45′, и ошибка послѣдовала въ избыткѣ на 10′, а уголъ BAC и разстоянiе AC вымѣряны вѣрно. Такимъ образомъ разность логариѳмовъ вымѣреннаго угла и истиннаго будетъ 8628. Но ежели бы уголъ не изъ точки C, но изъ точки D мѣрянъ былъ, и съ равною погрѣшностiю уголъ ADB найденъ бы былъ 78° 77, а уголъ BAD вымѣрянъ вѣрно, то разность логариѳмовъ соотвѣтствующихъ истинному и вымѣрянному углу будетъ 2001 меньше, нежели прежде. Слѣдовательно и въ искомомъ разстоянiи AB меньшую погрѣшность произвесть должна. Откуду явствуетъ, что и въ избранiи мѣстъ должно слѣдовать извѣстнымъ правиламъ, которыя для предложенныхъ выше сего случаевъ въ слѣдующихъ параграфахъ сообщаются.

65) Положимъ, что въ § 57, когда мѣрянъ былъ уголъ ACB, ошибенось на весь-
Fig. ма малой уголъ BCb, а линеи AC и BC
28. вымѣряны вѣрно, то по Тригонометрiи вмѣсто разстоянiя AB найдется Ab. Чтобъ опредѣ-

опредѣлить, сколько разстоянїе Ab отъ истиннаго разнствуетъ, изъ центра C радїусомъ CB опиши дугу Bb, которую для малости ея за прямую линею почесть должно, и уголъ CBb будетъ прямой: Потомъ ежели изъ A чрезъ B опишешь дугу Bd, то будетъ AB = Ad уголъ ABd прямой, слѣдовательно ABd − CBd = CBb − CBd, т. е. ABC = bBd и въ треугольникѣ Bbd будетъ

$$\sin tot : \sin bBd = Bb : db$$
$$\text{или } \sin tot : \sin ABC = Bb : db$$

откуду $db = \frac{Bb \times \sin ABC}{\sin tot}$. Слѣдователно при равныхъ прочихъ обстоятельствахъ погрѣшность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ ABC будетъ меньше: откуду видно, что мѣсто C сколько возможно ближе къ мѣсту A выбирать надлежитъ, дабы углы A и C ближе къ прямымъ подходили.

66) Чтобъ перейти всѣ случаи, о которыхъ выше сего упомянуто, положимъ, что когда изъ двухъ угловъ A, ABC и линеи AC ищется разстоянїе AB, въ мѣрянїи угловъ послѣдовала въ одномъ только ошибка, такъ что вмѣсто угла ACB взятъ бы былъ уголъ ACb, то по выкладкѣ вмѣсто AB найдется Ab, и ежели изъ центра C разстоянїемъ CB опишется дуга BE, то по малости угла BCE дугу BE можно почесть за прямую линею, которая будетъ мѣра Fig. 29.

 погрѣш-

погрѣшности въ углѣ послѣдовавшей: И понеже углы CBE и CEB суть прямые, то должно быть ABC+EBb=90°, BbE+EBb =90°. Откуду ABC+EBb=BbE+EBb и ABC=BbE, но въ треугольникѣ BbE должно быть

$$\sin BbE : \sin tot = BE : Bb \text{ или}$$
$$\sin ABC : \sin tot = BE : Bb$$

Откуду $Bb = \frac{\sin tot \times BE}{\sin ABC}$. Слѣдовательно при равной въ углѣ погрѣшности, разность между истиннымъ разстоянiемъ и найденнымъ тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ ABC будетъ больше, и потому мѣсто C такое выбирать надлежитъ, чтобъ углы A и ACB были острые, а уголъ B, сколько возможно, подходилъ ближе къ прямому, для того что ежели будетъ тупой, то угла тупаго и остраго съ тупымъ 180° составляющаго синусы бываютъ равны, и потому тупой уголъ къ сему намѣренiю не способенъ.

67) Погрѣшность можетъ послѣдовать не только въ мѣрянiи угла ACB, но и въ мѣрянiи угла CAB. Чтобъ и въ такомъ
Fig. 30. случаѣ опредѣлить разность найденнаго разстоянiя отъ истиннаго, положимъ, что мѣряя уголъ CAB ошибенось на весьма малой уголъ bAf, такъ что ежели разстоянiемъ Ab опишешь дугу Fb, то оную за прямую линею

линею почесть можно. И понеже въ разстояніи отъ угла ACb происходящая погрѣшность уже опредѣлена $= \frac{\sin tot \times BE}{\sin ABC}$, остается опредѣлить погрѣшность, которая отъ угла CAf произойти имѣетъ. равнымъ образомъ какъ прежде сего доказано будетъ, что уголъ Ffb = углу BbE, и слѣдовательно = углу ABC, а въ треугольникѣ FbF будетъ

$$\sin Ffb : \sin Fbf = Fb : Ff$$
$$\text{или } \sin ABC : \sin Fbf = Fb : Ff$$

Откуду сумма погрѣшностей въ разстояніи отъ обѣихъ угловъ будетъ $= Bb + Ff = \frac{Fb \sin Fbf + \sin tot \times BE}{\sin ABC}$, или понеже $\sin tot = 1$ и $\sin Fbf = \cos Ffb = \cos ABC$, то произойдетъ $Bb + Ff = \frac{Fb \cos ABC \times BE}{\sin ABC}$. Откуду слѣдуетъ, что разность найденнаго разстоянія отъ угла BAC не зависитъ, и тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ ABC будетъ больше, однакожъ не долженъ быть болѣе прямаго. Откуду явствуетъ, какія мѣста для мѣрянія угловъ въ предложенныхъ задачахъ выбирать надлежитъ.

Задача 20.

68) *Найти высоту мѣста, къ которому подойти можно.*

Рѣшеніе.

Помощію астролябіи вымѣряй уголъ
Fig. ACB (§ 35), и понеже треугольникъ ABC
31. прямоугольной, то и уголъ BAC будетъ извѣстенъ. По сему вымѣрявъ линею CB можно будетъ посылать

sin BAC : sin ACB = CB : AB

или cos ACB : sin ACB = CB : AB = CB × tang ACB.

Нашедъ AB придай къ ней высоту инструмента CE = BD, и произойдетъ искомая высота.

Задача 21.

69) *Найти высоту неприступнаго мѣста, или къ которому подойти не возможно.*

Рѣшеніе.

Выбери два мѣста H и G, и вымѣ-
Fig. ряй разстояніе между ими. Помощію астро-
32. лябіи, надъ точкою G поставленной, вымѣряй уголъ ACB. Потомъ астролябію перенесши на H вымѣряй уголъ ADB, тогда и уголъ ADC будетъ извѣстенъ, и такъ въ треугольникѣ ADC, изъ данныхъ угловъ ADC ACD и разстоянія DC можно будетъ найти AD посылая sin DAC : sin ACD = DC : AD. Опредѣливши AD въ треугольникѣ прямоугольномъ ADB, уголъ ADB извѣстенъ, то

можно

можно посылать $\sin tot : \sin ADB = AD : AB$. Такимъ образомъ соединяя двѣ посылки въ одну произойдетъ

$$\sin DBC \times \sin tot : \sin ACD \times \sin ADB = DC : AB.$$

Нашедъ AB искомая высота будетъ $= AB + DH$.

Примѣчанiе.

70) Какъ въ прежнихъ задачахъ, такъ и въ двухъ предъидущихъ, при равной погрѣшности въ углѣ ACB, разность истинной высоты, отъ высоты по выкладкамъ найденной зависитъ отъ угла ACB. Чтобъ опредѣлить самое выгодное мѣсто, откуду уголъ ACB мѣрять должно, положимъ, что при мѣрянiи угла ошибенось на весьма малой уголъ Bb, такъ чтобъ описанная дуга BD разтворенiемъ CB за прямую линею почесться могла. Такимъ образомъ углы CBD и BDb будутъ прямые, $ABC = BbD$, и въ треугольникѣ BbD будетъ Fig. 33.

$$\sin BbD : \sin tot = BD : Bb$$

$$\text{или } \sin ABC : \sin tot = BD : Bb.$$

Откуду Bb разность въ высотѣ произходящая отъ погрѣшности въ углѣ ABC будетъ $= \frac{\sin. tot \times BD}{\sin ABC}$. Откуду видно, что при равной въ углѣ погрѣшности, найденная разность тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ ABC

АВС будетъ больше, или уголъ АСВ будетъ меньше. По сему надлежало бы мѣсто С какъ возможно выбирать далѣе отъ мѣряемой высоты: Но малые углы не столь способно и вѣрно мѣрять можно, то чтобъ по нѣкоторой части удовлетворить обѣимъ требованiямъ, надлежитъ мѣсто С выбирать такое, чтобъ уголъ АСВ не превышалъ 30°.

71) Когда ищется высота неприступнаго мѣста, то ошибка можетъ послѣдовать какъ въ углѣ ACD такъ и въ углѣ ADB. Положимъ сперьва, что ошибенось только при мѣрянiи угла АСВ, на толь малой уголъ ACE (e, что дугу Ae разтворенiемъ Ae описанную, за прямую линею почесть можно. Тогда перешедъ на мѣсто D, и вымѣрявъ уголъ ADB изъ треугольника aDC найденъ будетъ вмѣсто AD бокъ aD. Понеже уголъ eBAe прямой, то должно быть Aae+aAe=DAC+aAe, откуду Aae =DAC, и будетъ

Fig. 34.

$$\sin Aae : \sin tot = Ae : Aa$$

$$\text{или} \sin DAC : \sin tot = Ae : Aa = \frac{\sin tot \times AE}{\sin DAC}.$$

Потомъ изъ треугольника Aba найдется погрѣшность въ высотѣ $ab = \frac{\sin ACB \times Ae}{\sin DAC} = \frac{\sin ADB \times Ae}{\sin (ABD - ACB)}$.
Откуду видно, что при томъ же углѣ ADB и при равной погрѣшности въ углѣ АСВ, ошибка въ высотѣ тѣмъ будетъ меньше, чѣмъ уголъ АСВ будетъ меньше, слѣдовательно

тельно мѣсто D отъ мѣста C, какъ возможно, должно отстоять далѣе. О сей матерїи можно бы говорить пространно, но теперь и сего довольно. Сверьхъ предложенныхъ способовъ рѣшить такїя задачи, находятся у писателей и другїе, посредствомъ подобныхъ треугольниковъ, но я объ оныхъ умолчеваю, потому что нѣтъ удобнѣйшаго случая къ погрѣшности, какъ когда вымѣрянная линея кладется на бумагу по уменьшенному машпабу, и для того всегда безопаснѣе употреблять выкладки.

72) Планъ фигуры ABCDE называется фигура ей подобная abcde въ меньшемъ видѣ представленная, или которой бока уменьшены по машпабу, но въ такомже положенїи находятся, въ какомъ соотвѣтствующїе имъ въ фигурѣ abcde. Чтобъ планъ фигуры какой нибудь здѣлать, надлежитъ вымѣрять или опредѣлить по выкладкамъ довольное число частей фигуру составляющихъ, дабы треугольникамъ, на которые фигура раздѣлена представляется, на бумагѣ подобные начертить можно было. Въ практической Геометрїи по большой части нужда бываетъ въ двухъ случаяхъ. 1) Когда въ фигурѣ одни углы и ни одного боку, или одинъ только вымѣрять можно. 2) Когда бока и всѣ углы между боками фигуры заключающїеся вымѣрять можно. И для того я о сихъ только двухъ случахъ говорить намѣренъ: Fig. 35.

ренъ : всѣ случаи, которые въ самомъ дѣлѣ случиться могутъ, едва изчислить возможно, изъ того, что здѣсь говорено будетъ, всякому не трудно будетъ заключить, какъ при другихъ случаяхъ поступать надлежитъ.

Задача 22.

73) *Здѣлать планъ фигуры, въ которой одни углы мѣрять можно.*

Рѣшенїе.

Пусть будетъ фигура ABCDE, въ ко-
Fig торой ежели ни одного боку дѣйствительно
35. вымѣрять не можно, надлежитъ помощїю предложенныхъ выше сего способовъ найти разстоянїе двухъ которыхъ нибудь мѣстъ между собою, напримѣръ AB. Потомъ фигуру раздѣлить на треугольники, такъ чтобъ изъ каждаго мѣста по крайней мѣрѣ два протчїя видны были. Положимъ, что фигура ABCDE раздѣлена на треугольники ABE, BCE и CED и въ каждомъ треугольникѣ изъ каждаго мѣста два протчїя видны, тогда будучи на мѣстѣ A должно вымѣрять уголъ BBG, и перешедъ на B вымѣрять уголъ ABE, то и третей уголъ будетъ извѣстенъ, и треугольнику ABE, положивъ на бумагу линею AB, по уменьшенному маштабу подобней abe на бумагѣ начертить должно. Потомъ изъ точки B вымѣряй уголъ EBC, и изъ точки

C

C уголъ ECB, то и третей будетъ извѣстенъ, и для того къ треугольнику abe можно будетъ присовокупить подобной треугольникъ bce треугольнику BCE изъ точекъ C и D вымѣрявъ углы ECD и CDE къ начерченнымъ на бумагѣ треугольникамъ присовокупи треугольнику ECD подобной треугольникъ ecd и фигура abcde будетъ подобна фигурѣ ABCDE. равнымъ образомъ дѣйствіе продолжать надлежитъ, ежели фигура будетъ имѣть большее число боковъ, слѣдовательно и треугольниковъ.

Примѣчаніе.

74) Ежели потребное число угловъ, и бокъ фигуры извѣстенъ будетъ, то величину протчихъ боковъ можно будетъ опредѣлить по Тригонометріи. Въ семъ случаѣ когда бокъ AB извѣстенъ, и углы EAB и ABE вымѣряны, то бока AE и EB найдены будутъ чрезъ посылки sin AEB : sin ABE = AB : AE и sin AEB : sin EAB = AB : EB. Потомъ когда углы EBC и ECB вымѣряны будутъ, то въ треугольникѣ EBC всѣ углы и бокъ EB извѣстны, и для того протчіе бока опредѣлить можно чрезъ посылки sin ECB : sin EBC = EB : EC : sin ECB : sin BEC = EB : EC. Наконецъ въ треугольникѣ ECD вымѣрявъ углы ECD, и EDC бока ED и CD найдутся посылая sin EDC : sin ECD = EC : ED и sin EDC sin ECD = EC : ED. Такимъ образомъ въ каждомъ

домъ треугольникѣ всѣ три бока опредѣлены будутъ, и для того полагая на бумагу бока по уменьшенному маштабу фигурѣ ABCDE подобную или планъ ея abcde начертить можно. Сей способъ несравненно точнѣе перьваго, потому что на бумагу кладутся одни бока, а углы сами собою опредѣляются.

75) Изъ сего рѣшенія явствуетъ, что точность плана зависитъ отъ точнаго вымѣрянія линеи AB, которая въ такихъ случаяхъ *основаніе* называется, и отъ точнаго вымѣрянія угловъ. Чтобъ о семъ удостовѣриться, должно на конецъ перейти на мѣсто E, и вымѣрять углы AEB, BEC и CED. Тогда ежели во всякомъ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ будетъ составлять 180°, то углы вымѣряны вѣрно, а ежели сумма всѣхъ будетъ больше или меньше 180°, то понеже неизвѣстно, которой не справедливо вымѣрянъ, погрѣшность должно раздѣлить по всѣмъ угламъ треугольника пропорціонально градусамъ каждаго угла, чтобъ сумма всѣхъ составляла 180°. На примѣръ ежели бы въ треугольникѣ ABE найдено было, что уголъ A = 125° 45′, уголъ B = 34° 40′, уголъ E = 20° 17′, то сумма всѣхъ будетъ 180° 42′. Чтобъ опредѣлить сколько минутами каждой уголъ убавить должно, посылай 180° : 125° 45′ = 42′ : p, четвертое пропорціональное число p = 29′ 20″ будетъ число минутъ и секундъ, которыми уголъ A уменьшить должно.

жно. Потомъ 180° : 34° 40′ = 42′ : 9 = 8′ 5″. Слѣдовательно число минутъ и секундъ, которыми уголъ E убавить должно, будетъ = ~~4′ 35″~~, по сему въ выкладкахъ 8′ 35 должно положить A = 125° 15′ 40″ уголъ ABE = 34° 31′ 55″, и уголъ AEB = 20° 12′ 25″. Равнымъ образомъ поправлять надлежитъ углы въ протчихъ треугольникахъ, ежели кто вторично вымѣрять тѣже углы труда на себя принять не хочетъ.

76) При начерченіи плана сверьхъ взаймнаго положенія примѣчанія достойныхъ мѣстъ, требуется и положеніе ихъ въ разсужденіи странъ свѣта. Къ познанію сего по большой части употребляется компасъ, потому что стрѣлка концами своими склоняясь къ полюсамъ земнымъ, представляетъ меридіанъ мѣста, надъ которымъ центръ ея стоитъ, и когда станешь лицомъ къ сѣверу, которой всегда на стрѣлкѣ означается особливымъ знакомъ, то въ правой сторонѣ будетъ востокъ, въ лѣвой западъ, а позади югъ. И такъ когда чрезъ одно которое нибудь мѣсто на бумагѣ проведена будетъ меридіональная линея, то видно будетъ положеніе протчихъ въ разсужденіи странъ свѣта. Чтобъ на планѣ начерченномъ провесть меридіональную линею, ничего больше не требуется какъ замѣтить положеніе стрѣлки въ разсужденіи котораго нибудь другаго мѣста, на примѣръ ежели бы примѣче-

но было, что поставя компасъ въ точкѣ A, мѣсто B склоняется отъ стрѣлки въ правую сторону на 60°, то на бумагѣ должно только провесть линею AP такъ, чтобъ уголъ PAB равенъ былъ 60°: Такимъ образомъ видно будетъ, которыя мѣста лежатъ къ востоку и которыя къ западу. Мѣсто, котораго меридіанъ опредѣляется, обыкновенно берется то, отъ котораго дѣйствія начинаются. Польза и способность, которую въ подобныхъ случаяхъ опредѣленіе меридіана приноситъ, принуждаютъ меня предложить слѣдующую задачу.

Задача 23.

77) *Найти положеніе точки B по разсужденіи меридіана и круга Екватору параллельнаго чрезъ точку A проходящаго.* Fig. 35.

Рѣшеніе.

Когда поставишь центръ компаса надъ точкою A, то стрѣлка будетъ означать меридіанъ мѣста A которой пусть будетъ AP. И положимъ что точка P склоняется къ сѣверному полюсу, линея ad перпендикулярная къ линеѣ AP будетъ означать часть круга экватору параллельнаго чрезъ тоже мѣсто A проходящаго. Изъ точки B къ помянутымъ кругамъ проведи перпендикулярныя линеи Ba и Bb, которыя ежели опредѣлены будутъ, то и положеніе точки B будетъ извѣстно,

извѣстно, на сей конецъ должно вымѣрять или найти разстоянїе AB, и по компасу наклоненїе линеи AB къ меридїану. Такимъ образомъ въ треугольникѣ прямоугольномъ BAP, когда линея AB, и уголъ PAB извѣстны будутъ, то линеи Ab = aB и Bb = Aa найдутся чрезъ посылки.

sin tot : sin bAB = AB : Bb
и sin tot : sin BBb = AB : Ab.

Примѣчанїе.

78) Хотя разстоянїя Ab и Bb разсуждая по строгости геометрической должны быть дуги, но для малости безъ малѣйшей погрѣшности за прямыя линеи почитать должно. большая погрѣшность произойти можетъ ежели къ опредѣленїю меридїана употребленъ будетъ одинъ компасъ, потому что магнитная стрѣлка почти никогда точнаго полюса не показываетъ, и на одномъ и томъ же мѣстѣ склоненїе свое перемѣняетъ, и для того кто о точности старается къ опредѣленїю меридїана, можетъ употреблять слѣдующей способъ. Пусть будетъ точка O, которой меридїанъ опредѣлить должно. Изъ точки O, Fig. 36.
какъ центра на горизонтальной плоскости опиши два круга или болѣе, и въ центрѣ ихъ O поставь перпендикулярно къ плоскости шпильку ov, потомъ прежде полудни замѣть на кругахъ точки c, e, въ которыхъ тѣнь

отъ

отъ самаго верьху шпильки на плоскость падающая соединяется съ окружностями помянутыхъ круговъ; тожъ должно учинить и послѣ полудни, замѣтить точки d и f, и на конецъ дуги cd и ef раздѣлить на двѣ равныя части линея NO чрезъ центръ O и точки N и P проходящая будетъ означать маридіанъ мѣста.

79) Ежели точки N и P такое будутъ имѣть положеніе, что чрезъ одну которую нибудь и центръ проведенная прямая линея, не упадетъ на другую, то протянувши линеи OP, ON уголъ между ими содержащейся должно раздѣлить на двѣ равныя части, линея MO будетъ означать меридіанъ мѣста. Опредѣливши положеніе меридіана можно будетъ узнать сколь велико склоненіе магнитной стрѣлки отъ меридіана. Въ протчемъ я не думаю, чтобъ сіе требовало изъясненія, коимъ образомъ когда чрезъ точку A меридіанъ проведенъ, помощію астролябіи узнать можно наклоненіе къ оному линеи AB. Употребленіе меридіана въ слѣдующей задачѣ видно будетъ.

Задача 24.

80) *Здѣлать планъ фигуры, которой всѣ бока и углы между боками содержащіеся извѣстны.*

Рѣше-

Рѣшенїе.

Пусть будетъ фигура ABCDE, вькоторой одни бока и углы между ими содержащїеся вымѣрять можно. Мѣста A, откуду начало дѣйствїй учинено, опредѣли меридїанъ, которой пусть будетъ AP, и наклоненїе линеи AB къ меридїану. Тогда въ треугольникѣ прямоугольномъ ABb бокъ AB и всѣ углы будутъ извѣстны, и для того линеи Ab = aB и Bb = aA, или разстоянїя точки B отъ меридїана AP и круга екватору параллельнаго aAf найдены будутъ чрезъ посылки sin tot : sin BAb = AB : Bb; sin tot: sin ABb = AB: Ab: Потомъ когда изъ ABC вычтешь уголъ ABb, останется уголъ CBb; посему въ треугольникѣ прямоугольномъ BCc бока Bc и Cc найдутся черезъ посылки, sin tot : sin CBc = CB : Cc; sin. tot : sin BCc = CB : cB, и разстоянїе точки C отъ меридїана AP будетъ = cb = Bb — Bc, а разстоянїе отъ круга af будетъ Ab + Cc. Теперь ежели изъ угла BCD вычтется уголъ BCc, останется уголъ DCd, и въ треугольникѣ CDd бока Dd и Cd найдутся посылками sin tot : sin DCd = DC : Dd, и sin tot: sin CDd = CD : Cd: разстоянїе точки D отъ меридїана AP будетъ Dd — cb = Dd — Bb + Bc, а разстоянїе отъ круга af будетъ = Ab + Cc — Cd. Понеже уголъ dDC извѣстенъ и уголъ dDg прямой, то ежели изъ EDC отъимешь уголъ 90° + dDc, останется уголъ gDE, и въ треугольникѣ EDg извѣстны будутъ вѣ углы Fig. 37.

ы и бокъ

и бокъ ED, и по тому найдены будутъ Eg и Dg чрезъ посылки sin tot : sin EDg = ED : Eg, sin. tot : sin DEg = ED : gD. По сему разстоянїе точки E отъ меридїана будетъ Eg+ge = Eg+Dd−Bb+Bc, и отъ круга екватору параллельнаго Ef = Ab+Cc−Cd−gD. Такимъ образомъ разстоянїе каждаго мѣста отъ помянутыхъ круговъ найдутся. По сему ежели на бумагѣ проведешь двѣ линеи, изъ которыхъ бы одна меридїанъ мѣста A, а другая кругъ екватору параллельной представляла, то разстоянїя каждаго мѣста отъ помянутыхъ линей по уменьшенному маштабу на бумагѣ означить, и планъ начертить можно.

Примѣчанїе

81) Подобной способъ можно употребить къ рѣшенїю выше сего предложеннаго случая. Когда по вымѣрянїи надлежащихъ линей и угловъ планъ дѣлать должно, то сомнѣнїе произойти можетъ а особливо когда фигура будетъ многоугольна, въ которую сторону напримѣръ линею BC къ линеѣ AB подъ угломъ ABC поставить должно Но понеже меридїаны точекъ A, B, C и пр: за параллельные между собою почитать должно, сїе сомнѣнїе легко отвращено быть можетъ, ежели при всякомъ поворотѣ помощїю компаса примѣчено будетъ, въ которую сторону линея, которую мѣрять слѣдуетъ, отъ меридїана мѣста склоняется. Такимъ образомъ

разомъ о всякомъ бокѣ извѣстно будетъ, какъ его на бумагу положить должно. Вѣрно ли углы A, B, C, D и пр: вымѣряны можно узнать по § 75 Геом:

82) Къ сниманїю плановъ съ не больших мѣстъ, которыхъ примѣчанїя достойныя мѣста, изъ одного или двухъ мѣстъ видны, употребляется иногда Геометрической столикъ съ мишенями на троеножной подставкѣ, на которомъ линеи проводятся, и планъ изображается. Употребленїе онаго видно будетъ изъ слѣдующей задачи.

Задача 25.

83) *Здѣлать планъ фигуры неправилной прямолинейной, которой всѣ углы изъ двухъ мѣстъ видны.*

Рѣшенїе.

Пусть будетъ фигура ABCD, и мѣста, из которыхъ углы фигуры видны O и F. Fig. 38.

1) Поставь столикъ горизонтально, и такъ, чтобъ внизу столика висящей отвѣсъ и точка, около которой мишени обращаются, соотвѣтствовала точкѣ O.

2) Обращая мишени наводи на каждой уголъ фигуры, и на столикѣ проведи склоняющїяся къ угламъ A, B, C, D, и мѣсту F линеи Oa, Ob, Oc, Od, Of.

 3)

3) Вымѣряй разстоянїе **OF**, и по размѣру геометрическому перенеси ее на проведенную на столикѣ линею **Of**, которая пусть будетъ **Oe**.

4) Перенеси столикѣ на **E**, и поставь такъ чтобъ точка e соотвѣтствовала точкѣ **F**, и точка **O** точкѣ **E**: потомъ обращая мишени около точки **F** наводи на каждой уголъ фигуры, и на столикѣ проведи склоняющїяся къ нимъ линеи Fα, Fβ, Fγ, Fδ, которыми прежнїя гдѣ нибудь пересѣчены будутъ.

5) На конецъ точки α, β, γ, δ, соедини прямыми линеями αβ, βγ, γδ, αδ, такъ чтобъ αβ содержалась между линеями **FA**, **FB**, линея βγ содержалась между линеями **FB**, **FC**, линея δγ между линеями **FA**, **FC** и линея αδ между линеями **FA**, **FD**. Фигура αβγδ будетъ подобна фигурѣ **ABCD** или ея планъ.

Примѣчанїе

84) Подобныхъ задачь множество вымыслить можно перемѣняя данныя вещи, но мнѣ объ оныхъ говорить пространно нѣтъ нужды, для того что во всѣхъ почти книгахъ, до практической геометрїи касающихся, пространнѣе, нежели бы какъ надлежало о сей матерїи, предлагается Кто довольное имѣетъ знанїе теоретической Геометрїи

метріи тотъ по перемѣнѣ данныхъ вещей и рѣшеніе пристойнымъ образомъ самъ перемѣнить можетъ. Я думаю, что больше услужу читателю, когда присовокуплю о сей матеріи рѣшенія такихъ задачь, которыя не во всякой книгѣ найти можно.

Задача 26.

85) *Ежели дано будетъ разстояніе* AB, *которое видѣть можно изъ точекъ* C *и* D, *опредѣлить взаимное положеніе мѣстъ* C D, *и мѣстъ* a, b, c, d, *не мѣряя разстоянія* CD *и другихъ линей къ мѣстамъ* a, b, c, d *склоняющихся.* Fig. 39.

Рѣшеніе.

Изъ точекъ C и D вымѣрявъ всѣ потребные углы положи по глазомѣру, сколько разстояніе CD содержитъ въ себѣ саженей, футовъ или дюймовъ. Потомъ вымѣрявъ величину угловъ ACD, ACB такъ какъ и угловъ BDC и ADB, въ треугольникахъ ACD и CBD можно будетъ опредѣлить всѣ протчія части, то есть линеи AD, CB, AC и BD, а потомъ изъ треугольника ACB или ADB найти длину линеи AB, которая, понеже CD положена по глазомѣру, должна будетъ разнствовать отъ настоящей длины линеи AB, и для того истинная длина линеи CD найдется чрезъ посылку. *Какъ найденная длина линеи* AB

къ сущей длинѣ тойже линеи, такъ длина по глазомѣру изятая линеи CD, *къ четвертому пропорцїональному*, которое будетъ сущая длина линеи CD. Опредѣливъ линею CD положенїе мѣстъ a, b, c, и пр: опредѣлить будетъ можно (§ 83).

Примѣръ.

86) Пусть будетъ AB = 2625, уголъ ACD = 100°, ACB = 57°, BCD = 43°, уголъ BDC = 115°, BDA = 60°, ADC = 55°, то будетъ CAD = 25°, CBD = 22°. Положимъ CD = 1500; чтобъ излишнихъ выкладокъ не дѣлать, изъ треугольника ACD сыщемъ бокъ AD, и изъ треугольника CBD бокъ CB, дабы изъ треугольника ACB можно было сыскать AB. По сему.

въ треуг. ACD будетъ	въ треугольникѣ BCD
ſin ACD : ſin ADC = CD : AC	ſin CBD : ſin BDC = CD CB
lſin ADC = 9.9133645	lſin BDC = 9.9572757
lCD = 3.1760913	lCD = 3.1760913
13.0894558	13.1333670
lſin ACD = 9.6259483	lſin CDB = 9.5735754
lAC = 3.4635075	lCB = 3.5597916
откуду AC = 2907.42	CB = 3629.04.

въ треугольникѣ ACB вѣдая бока AC, CB и уголъ ACB по § 53 Триг: посылать должно.

CB

$$CB+AC : CB-AC = \tang\tfrac{1}{2}(CAB+ABC) : \tang\tfrac{1}{2}(CAB-ABC)$$

$$l\tang\tfrac{1}{2}(CAB+ABC) = 10.2652356$$
$$l(CB-AC) = 2.8583086$$
$$13.1235442$$
$$l(CB+AB) = 3.8153147$$
$$l\tang\tfrac{1}{2}(CBA-BAC) = 9.3082295 = 11^\circ\ 29'\ 38''$$

Откуду найдется уголъ $CAB = 72^\circ\ 29'\ 38''$ и уголъ $ABC = 50^\circ\ 0'\ 22''$. Потомъ чтобъ найти AB посылай

$$\sin ABC : \sin ACB = AC : AB$$
$$l\sin ACB = 9.9235914$$
$$lAC = 3.4635075$$
$$13.3870989$$
$$l\sin ABC = 9.8843027$$
$$lAB = 3.5027952, \text{и } AB = 3182,7.$$

По сему положенїю разстоянїе AB происходитъ больше, нежели истинное, которое должно быть 2625; слѣдовательно CD положено болѣе надлежащаго. Чтобъ опредѣлить точное, посылай

$$3182,7 : 2625 = 1500 : CD$$
$$l1500 = 3.1760913$$
$$l2625 = 3.4191293$$
$$6.5952206$$
$$l3182,7 = 3.5027962$$
$$lCD = 3.0924244$$

Отку-

откуду CF = 1237,18. Нашедъ истинную длину разстоянія CD взаимное положеніе мѣста a, b, c и d или планъ по § 83 здѣлать будетъ можно.

Задача 27.

87) *Опредѣлить въ разсужденіи даннаго треугольника ABC положеніе мѣста O, изъ котораго всѣ углы треугольника видны.*

Рѣшеніе.

Въ сей задачѣ три случая быть могутъ, точка O или внѣ треугольника, или внутрь, или на которой нибудь бокъ упасть можетъ.

Fig. 40. Случай 1.) Представь себѣ, что чрезъ точки B, C и O описанъ кругъ, и проведены линеи OA, OB, OC, потомъ BD и CD: уголъ AOB, которой вымѣрять можно, будетъ = углу BCD, и уголъ AOC, которой также вымѣрять можно, = углу CBD; и такъ въ треугольникѣ BDC извѣстенъ будетъ бокъ BC и углы при концахъ бока находящіеся, по сему можно будетъ опредѣлить бока CD и BD. Потомъ въ треугольникѣ ABD два бока извѣстны и уголъ ABD = ABC − CBD = ABC − AOC, слѣдовательно всѣ части треугольника опредѣлить можно. Равнымъ образомъ найдется треугольникъ

никъ ADC, и слѣдовательно въ треугольникахъ AOB, AOC бока BO и CO.

Случай 2) Представь себѣ, что чрезъ точку O, и чрезъ которые нибудь углы треугольника описанъ кругъ, тогда вымѣрявъ уголъ AOB, будетъ извѣстенъ и уголъ BOD=BCD, и вымѣрявъ уголъ AOC, будетъ извѣстенъ уголъ COD=CBD. И такъ въ треугольникѣ BCD извѣстенъ будетъ бокъ CB и углы CBD и BCD, по сему можно найти бока BD и DC. Потомъ въ треугольникѣ ABD извѣстны будутъ бока AB, BD и уголъ ABD=ABC+CBD=ABC+COD и для того найдется бокъ AD и уголъ BAD; равнымъ образомъ найдутся части треугольника ACD, и слѣдовательно треугольниковъ AOB и AOC. Fig. 41.

Случай 3.) Ежели мѣсто зрителя будетъ на бокѣ треугольника CB, то какъ прежде представивъ себѣ кругъ чрезъ точки A, B, O проходящей, и вымѣрявъ уголъ AOB въ треугольникѣ AOB будутъ даны всѣ углы и бокъ AB. По сему бока AO и OB, а потомъ и CO опредѣлить можно. Fig. 42.

Задача 28.

88) *Данную прямолинейную фигуру раздѣлить на сколько нибудь равныхъ частей.*

Рѣшенiе.

Пусть будетъ фигура ABCDE, и по-
Fig. ложимъ, что должно ее раздѣлить на три
43. равныя части. Надлежитъ сыскать 1) площадь фигуры, и раздѣлить на столько равныхъ частей, на сколько фигуру раздѣлить должно.

2) Третьей части возьми половину, изъ половины вычти площадь треугольника AED, потомъ остатокъ раздѣли на $\frac{1}{2}$ AD, найдется высота треугольника AID, которой съ треугольникомъ ADE составитъ третью часть фигуры, и для того въ разстоянiи найденной высоты линеѣ AD проведи параллельную линею, которая гдѣ нибудь пересѣчетъ линею AB, пусть будетъ точка I, въ которой линея AB пересѣчется, и для того ежели проведешь линею DI, фигура DEIA будетъ третья часть.

3) Найденную прежде сего шестую часть фигуры раздѣли на $\frac{1}{2}$ DI, и произойдетъ высота треугольника IKD: въ разстоянiи найденной высоты линеѣ ID проведи параллельную, которою опредѣлена будетъ точка K. Вымѣрявъ линею DK, раздѣли на оную шестую часть площади фигуры, и найдется высота треугольника KLD, равнаго шестой части фигуры, и для того въ разстоянiи найденной высоты проведи параллельную линеѣ KD, и означится точка L.

4) Проведи линею KL, и будетъ фигура DLKI равна третьей части фигуры. Равнымъ образомъ поступать надлежитъ, ежели данную фигуру должно будетъ раздѣлить набольшее число частей.

Примѣчаніе 1.

89) Ежели треугольникъ, отъ котораго дѣленіе начинается больше будетъ третьей части фигуры, то ее должно вычесть изъ площади треугольника, и остальная площадь будетъ площадь треугольника, которую вычесть должно изъ треугольника AED, чтобъ остатокъ былъ равенъ третьей части фигуры. Изъ рѣшенія само собою видно, что дѣленіе можно начать отъ каждаго угла. Чтобъ данную на поверхности земной прямолинейную фигуру раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, надлежитъ на бумагѣ начертить ей подобную, и по предписаннымъ выше сего правиламъ раздѣлить на данное число частей. Такимъ образомъ когда на бумагѣ дѣленіе совершится, то и на поверьхности земной точки I, K и L по величинѣ линей AI, IK и DL означить будетъ можно.

90) Къ рѣшенію сей задачи надлежитъ папередъ найти площадь фигуры, которая произойдетъ, ежели площади всѣхъ треугольниковъ фигуру составляющихъ сложены будутъ въ одну сумму. А чтобъ каж-

даго

даго треугольника площадь опредѣлить можно было, надлежитъ взявши бокъ которой нибудь за основанїе найти высоту. Въ семъ случаѣ ежели фигура раздѣлена будетъ на треугольники AED, ADC и ACB, и линеи AD и AC взяты будутъ за основанїя, перпендикулярныя къ основанїямъ линеи EH, DG, BF будутъ высоты, которыя всегда найти можно, ежели довольное число частей къ начерченїю подобной фигуры будетъ извѣстно. Въ первомъ случаѣ, когда изъ одного бока фигуры, и угловъ треугольниковъ планъ дѣлается, высоту каждаго треугольника найти можно слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ данной бокъ AE и углы AED, EDA ADC, DCA, ABC вымѣряны, начиная отъ треугольника AED, каждаго треугольника всѣ бока и углы по Тригонометрїи опредѣлить можно, и для того когда въ треугольникѣ AED вѣдая бокъ AE и уголъ EAH, высота EH найдется посылкою fin tot: AE = fin EAH : EH. Подобнымъ образомъ въ каждомъ треугольникѣ высоту опредѣлить можно, слѣдовательно и площадь фигуры. Что здѣсь говорено о первомъ случаѣ нетрудно можно приложить и къ другому.

Примѣчанїе 2.

91) Выше сего упоминалъ, что нерѣдко случается, что инструмента которымъ углы мѣряются, не можно такъ поставить,

чтобъ

чтобЪ центрЪ онаго стоялЪ надЪ точкою, надЪ которою стоять долженЪ, и для того принуждены бываемЪ на нѣкоторое разстоянїе отступать отЪ того мѣста, какЪ на примѣрЪ на аршинЪ, на сажень и болѣе. ВЪ такомЪ случаѣ, чѣмЪ болѣе отЪ центра мѣста отступаемЪ, тѣмЪ болѣе разнствующей мѣряемЪ уголЪ отЪ того, которой бы мѣрять надлежало. ВЪ подобныхЪ случаяхЪ вымѣрянной уголЪ всегда поправлять надлежитЪ.

92) ЦентрЪ инструмента вЪ разсужденїи центра мѣста или точки на земли назначенной разныя можетЪ имѣть положенїя. ПоложимЪ что должно вымѣрять уголЪ **ACB**, то центрЪ инструмента можетЪ соотвѣтствовать 1) точкѣ **O** падающей на линею соединяющую точку **C** и которое нибудь изЪ мѣстЪ **A** или **B**. ВЪ такомЪ случаѣ вмѣсто **ACB** вымѣрянЪ будетЪ уголЪ **AOB**, больше нежели **ACB**: потому что **AOB**=**ACB**+**OAC**, и **ACB**=**AOB**−**OAC**. Слѣдовательно уголЪ надлежащей **ACB** произойдетЪ ежели изЪ угла **AOB** вычтется уголЪ **OAC**. А ежели центрЪ инструмента соотвѣтствовать будетЪ точкѣ **E**, то уголЪ **ACB** найдется, ежели кЪ вымѣрянному **AEB** приданЪ будетЪ уголЪ **CAE**. Fig. 44.

2) ЦентрЪ инструмента можетЪ стоять внутрь угла **AOB**, надЪ точкою **O**, которая падаетЪ на линею **COF** проходящую Fig. 45.

дящую между мѣстами A и B, въ такомъ случаѣ уголъ AOB будетъ больше нежели ACB суммою угловъ OAC и OBC, потому что AOF = ACO + OAC, и BOF = BCO + OBC. И для того, чтобъ опредѣлить величину угла ACB изъ вымѣряннаго AOB должно вычесть углы OAC и OBC, и останется истинной уголъ ACB. А ежели центръ астролябіи будетъ надъ точкою E, то къ углу AEB должно будетъ придать углы CAE и CBE, и произойдетъ уголъ ACB.

Fig. 46. 3) Ежели центръ инструмента стоять будетъ внѣ угла надъ точкою O, то вмѣсто угла ACB вымѣрянъ будетъ уголъ AOB, которой меньше угла AGB угломъ OAC, потому что AGB = AOB + OAC, слѣдовательно AOB = AGB − OAC, а уголъ AGB = ACB + OBC, откуду ACB = AGB − OBC. Но AGB = AOB + OAC слѣдовательно ACB = AOB + OAC − OBC. Изъ сего явствуетъ, что ежели изъ суммы угловъ AOB и OAC вычтется уголъ OBC, произойдетъ уголъ ACB.

93) Чтобъ можно было опредѣлять малинькіе углы, отъ которыхъ поправки зависятъ, надлежитъ во первыхъ знать разстояніе инструмента отъ точки C, потомъ въ случаѣ первомъ уголъ AOC, во
Fig. 44. второмъ и третьемъ углы AOC и BOC, которые вѣрно вымѣрять можно, и напослѣ-

докъ

докъ разстоянія AO и OB, которыхъ величину напередъ другимъ образомъ какъ глазомѣромъ опредѣлить не можно. И хотя глазомъ мѣряя разстояніе AO около трехъ или четырехъ верстъ, случится на 100 или 200 саж: ошибится, однакожъ чувствительной погрѣшности въ углѣ OAC опасаться не должно. Чтобъ сіе самимъ дѣломъ показать, положимъ $CO = 2$ саж: разстояніе AO, которое почти равно разстоянію $AC = 4$ верст: $= 2000$ саж: уголъ $AOB = 130°$, слѣдовательно уголъ $AOB = 50°$ и чрезъ посылку

$$AO + OC : AO - OC = \tang \tfrac{1}{2}(ACO + CAO) : \tang \tfrac{1}{2}(ACO - CAO)$$

$$\begin{aligned} l\tang \tfrac{1}{2}(ACO + CAO) &= 10.3313275 \\ l(AO - OC) &= 3.3005955 \\ \hline & 13.6319230 \\ l(AO + OC) &= 3.3014641 \\ \hline l\tang \tfrac{1}{2}(ACO - CAO) &= 10.3304589 \end{aligned}$$

Найдется уголъ $OAC = 2' \, 39''$. Положимъ, что глазомъ мѣряя разстояніе AO ошибенось на 120: и для опредѣленія угла OAC положено $AO = 1880$ саж: то будетъ $AO + OC = 1882$, $AO - OC = 1879$, и найдется $l\tang \tfrac{1}{2}(AOC - CAO) = 10.3304135 = 64° \, 57' \, 13''$. Откуду уголъ $OAC = 2' \, 47''$, разность отъ сего положенія будетъ $8''$, которую и въ самыхъ строгихъ размѣреніяхъ презрѣть можно. Сверьхъ сего, ежели кому въ

подоб-

подобныхъ случаяхъ выше сего найденная разность покажется велика, то вымѣрявъ протчіе углы треугольника, уголъ ABC еще поправить будетъ можно. Изъ предложеннаго примѣру явствуетъ, какъ при другихъ случаяхъ поступать надлежитъ.

94) **Ежели мѣста**, на которые зритель наводитъ, чтобъ уголъ вымѣрять не будутъ на горизонтѣ, или плоскости, на которой зритель находится, и на которую падаетъ линея, которой длину опредѣлить должно, то уголъ инструментомъ взятой надлежитъ приводить къ горизонту, то есть опредѣлить вымѣрянному углу соотвѣтствующей на горизонтѣ. Чтобъ сіе изъяснить, положимъ, что плоскость бумаги или BOD представляетъ горизонтальную плоскость, на которой зритель находится въ точкѣ O,
Fig. 47. и мѣряетъ уголъ AOC, гдѣ AB и CD представляютъ двѣ высоты къ горизонту перпендикулярныя, B и D основанія на горизонтѣ находящіяся, A и C верьхи, на которые зритель наводитъ. Само собою видно, что уголъ на горизонтѣ BOD будетъ со всѣмъ другой величины, нежели мѣряемой уголъ AOC, и понеже точки A и C различныя въ разсужденіи горизонта положенія имѣть могутъ, различныя отъ туду задачи происходятъ.

Зада-

Задача 29.

95) *Ежели точки* **A** *и* **C** *изъ мѣста* Fig. 47.
O *будутъ казаться наровно отстоять отъ горизонта, т. е. какъ высота* **AB**, *такъ и высота* **CD** *будутъ казаться подъ равными углами, изъ даннаго угла* **AOC** *найти уголъ* **BOD** *на горизонтѣ углу* **AOC** *соотвѣтствующей.*

Рѣшенïе.

Понеже высоты AB и CD кажутся подъ равными углами, то ни уголъ AOC, ни BOD не перемѣнится, ежели представишь, что на линеѣ OD въ разстоянïи OP=OB находится высота PQ, уголъ AOQ будетъ равенъ углу AOC, BOP=BOD, и AB=QP. Проведи линеи AQ и PB, изъ которыхъ PB будетъ на горизонтальной плоскости, а AQ на вертикальной и линеѣ PB параллельна: Потомъ, понеже ABO треугольникъ прямоугольной, то будетъ.

$$\sin. tot: \sin. BAO = AO: OB.$$

Проведи линею OF, которая бы уголъ AOQ=AOC и линею AQ раздѣляла на двѣ равныя части, изъ центра O разстоянïемъ OB опиши дугу BE, и проведи EH параллельную линеѣ AF, то треугольники AOF и EOH будутъ прямоугольны и подобны между собою и потому.

$$AO : EO = AF : EH$$ или
$$AO : OB = BG : EH$$
но $BG : EH = \sin BOG : \sin EOH$
откуду $AO : OB = \sin BOG : \sin EOH$, но выше сего было $\sin tot : \sin BAO = AO : OB$
слѣдоват: $\sin tot : \sin BAO = \sin BOG : \sin EOH$,
или $\sin BAO : \sin. tot = \sin EOH : \sin BOG$.

Нашедши уголъ $BOG = \frac{1}{2} BOD$, ицѣлой BOD уголъ будетъ извѣстенъ.

Примѣръ.

96) Пусть будетъ уголъ $AOB = COD = 2° \ 35'$. $AOC = AOQ = 65° \ 28'$, то произойдетъ $BAO = 87° \ 25'$, $EOH = 32° \ 44'$.

$$l \sin EOH = 9.7329803$$
$$l \sin. tot = 10.0000000$$
$$19.7329803$$
$$l \sin BAO = 9.9995584$$
$$l \sin BOG = 9.7334219 = 32° \ 46' \ 15''.$$

Слѣдовательно уголъ $BOD = 65° \ 32' \ 30''$. Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ, ежели обѣ точки будутъ ниже горизонта.

Задача 30.

Fig. 48. 97) *Ежели одна точка A будетъ выше горизонта, а другая C на горизонтѣ или*

или на той же самой плоскости, на которой зритель находится, вымѣрявъ уголъ AOC найти уголъ BOC на горизонтѣ, углу AOC соотвѣтствующей.

Рѣшенїе.

Изъ точки A перпендикулярная линея къ горизонту пусть будетъ AB. Изъ точки B къ линеѣ OC проведи перпендикулярную BE; ежели изъ A къ точкѣ E протянешь линею AE, то уголъ AEO будетъ прямой. Потомъ въ треугольникѣ AOB будетъ

$$OB : OA = \sin OAB : \sin tot.$$

въ тр: OAE $OA : OE = \sin tot : \sin OAE$ откуду

$$OB : OE = \sin OAB : \sin OAE$$

Потомъ изъ треугольника OBE будетъ

$$OB : OE = \sin tot : \sin OBE$$

слѣдоват: $\sin OAB : \sin OAE = \sin tot : \sin OBE$.

По сей посылкѣ можно будетъ найти уголъ BOE на плоскости горизонтальной углу AOC соотвѣтствующей, для того что $\sin OBE = \cos BOE$.

Примѣръ.

98) Пусть будетъ $AOB = 3° \; 12'$, $AOC = 59° \; 30'$, то будетъ $OAB = 86° \; 48'$, $OAE = 30° \; 30'$.

$$
\begin{array}{rl}
l\,\sin\,tot = & 10.0000000 \\
l\,\sin OAE = & \underline{9.7054689} \\
 & 19.7054689 \\
l\,\sin OAB = & \underline{9.9993223} \\
l\,\sin OBE = & 9.7061466
\end{array}
$$

Откуду OBE $= 30^{\circ}\ 33'\ 9''$. Слѣдовательно BOC $= 59^{\circ}\ 26'\ 51''$.

Задача 31.

Fig. 49. 99) *Ежели точки* A *и* C *будутъ выше плоскости горизонтальной, и не равно отстоять отъ горизонта, изъ даннаго угла* AOC *найти уголъ* BOD *на горизонтѣ, соотвѣтствующей углу* AOC.

Рѣшенiе.

Пусть будетъ плоскость горизонтальная BOD или плоскость на которой зритель будучи въ точкѣ O мѣряетъ уголъ AOC, и высота AB кажется подъ угломъ AOB, а высота CD подъ угломъ COD. Понеже уголъ AOB не перемѣнится, ежели представишъ, что на линеѣ BO въ разстоянiи OQ=OD находится высота PQ, ниже уголъ QOD соотвѣтствующей на горизонтѣ разнствовать будетъ отъ угла BOD; сверьхъ сего, понеже отъ длины линей OP, OC не зависятъ помянутые углы, то положивъ PC по произволенiю какой нибудь длины, изъ треугольника

угольника OPC опредѣли бока OP, OC. Потомъ изъ треугольниковъ POQ, COD сыщи линеи PQ и CE въ той же мѣрѣ, къ которой PC относится. Потомъ представь, что линея CD парраллельна линеѣ DQ найдется PZ посылая

PE : PQ = PC : PZ

и точка Z будетъ на горизонтѣ. Изъ треугольника POZ, на одной плоскости съ треугольникомъ POC находящагося, можно будетъ опредѣлить уголъ POZ и ему соотвѣтствующей на горизонтѣ QOZ. Равнымъ образомъ углу COZ = POZ − POC найдется уголъ соотвѣтствующей на горизонтѣ DOZ (§ 97) и ежели изъ угла QOZ вычтется уголъ DOZ, то останется искомой уголъ.

Примѣръ.

100) Пусть будетъ POC = 30°, AOB = 60′, COD = 30′, PC = 4000, то будетъ OPC = PCO = 75°, линея OP = OC найдется чрезъ посылку

fin POC : fin PCO = PC : OP = OC

lPC = 3.6020600
lfin PCO = 9.9849438
13.5870038
lfin POC = 9.6989700
lOP = 3.8880338. слѣд. OP = 7727,4

 въ тре-

въ треугольникѣ POQ	въ треугольникѣ COD
sin. tot: sin POQ = PO : PQ	sin tot: sin COD = OC : CD
l PO = 3.8880338	l OC = 3.8880338
l sin POQ = 8.2418553	l sin COD = 7.9408419
12.1298891	12.8288757
l PQ = 2.1298891	l CD 1.8288757
откуду PQ = 134.8	откуду CD = 67, 4

изъ сего явствуетъ, что PQ = 2CD, для того что углы POQ и COD не велики, и потому въ посылкѣ

$$PE : PQ = PC : PZ$$

Можно положить PE = 30, PQ = 60. Не дѣлая выше сего помянутыхъ выкладокъ, но когда разность между углами будетъ простираться на нѣсколько градусовъ, то помянутыя выкладки неотмѣнно дѣлать должно. Въ семъ случаѣ найдется PZ = 8000, и по сему въ треугольникѣ POZ даны будутъ бока PO, PZ, и для того, чтобъ опредѣлить уголъ POZ должно посылать.

$$PZ+PO : PZ-PO = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(PZO+POZ) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(POZ-PZO)$$

$$\begin{aligned}
l\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(PZO+POZ) &= 10.1150195 \\
l\,PZ-PO &= 2.4355258 \\
& \overline{12.5505453} \\
l\,(PZ+PO) &= 4.1966569 \\
l\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(POZ-PZO) &= \overline{8.3538884} = 1^\circ\ 17'\ 38''
\end{aligned}$$

По сему уголъ POZ будетъ = 53° 47′ 38″, COZ = 23° 47′ 38″. Чтобъ изъ найденныхъ угловъ найти

найти каждому соотвѣтствующей на горизонтѣ, по § 97 должно посылать.

sin OPQ : cos POZ = sin. tot : sin QOZ

l sin tot = 10.0000000
l cos POZ = 9.7714183
19.7714183
l sin OPQ = 9.9999338
l sin OPZ = 9.7714845 36° 13′ 4″

и уголъ QOZ буд: = 53° 46′ 56″. Потомъ
sin OCD : cos COZ = sin tot : cos DOZ.

l sin tot = 10.0000000
l cos COZ = 9.9614223
19.9614223
l sin OCD = 9.9999835
cos DOZ = 9.9614388 66° 12′ 40″

и уголъ DOZ = 23° 47′ 20″. Слѣдовательно углу POC или AOC соотвѣтствующей на горизонтѣ уголъ QOZ = 29° 59′ 36″.

Задача 32.

101) *Ежели зрителю изъ мѣста* O *точка* A *будетъ казаться выше горизонтальной плоскости* BOD, *а другая* C *ниже, изъ даннаго угла* AOC, *опредѣлить уголъ* BOD *соотвѣтствующей на горизонтѣ.* Fig. 50.

Рѣшенiе.

Понеже длина линей AO, OC ни какой перемѣны въ углахъ BOA, DOC, AOC

и BOD не дѣлаетъ, положивъ $AO = CO$, возми по произволенію AO или OC какой нибудь длины, и по величинѣ линей AO или OC изъ треугольниковъ прямоугольныхъ AOB и COD опредѣли бока AB и CD. Потомъ отъ подобія треугольниковъ ABS и CDS будетъ.

$$AB : CD = AS : SC \text{ и}$$
$$AB + CD : CD = AC : SC$$

Изъ точки S, гдѣ линея AC горизонтъ пересѣкаетъ, проведи SE параллельную линеѣ AO, и будетъ уголъ $AOC = SEC$. слѣдовательно уголъ $SEO = 180 - AOC$ и

$$AC : SC = OC : EC \text{ или}$$
$$AB + CD : CD = OC : EC$$

А понеже AO представляется $= OC$, то будетъ $SE = EC$, нашедши EC извѣстна будетъ и линея OE, по сему въ треугольникѣ OES извѣстны будутъ бока OE, ES и уголъ OES слѣдовательно найдутся углы SOC и AOS, изъ которыхъ каждому опредѣли соотвѣтствующей уголъ на горизонтѣ, коихъ сумма будетъ искомой уголъ.

Примѣръ.

102) Пусть будетъ какъ въ прежнемъ примѣрѣ $AOB = 60^\circ$, $DOC = 30^\circ$, $AOC = 30^\circ$, и положимъ $AO = CO = 4000$.

въ

въ треугол: AOB будетъ	въ треугольникѣ COD
sin tot: sin AOB = AO : AB	sin tot: sin COD = OC : OD
l AO = 3.6020600	l OC = 3.6020600
l sin AOB = 8.2418553	l sin CoD = 7.9408584
11.8439153	11.5429184
l AB = 1.8439153	l OD = 1.5429184
откуду AB = 69, 8	откуду OD = 34, 9.

Изъ сего явствуетъ, что и здѣсь тоже самое имѣетъ мѣсто, что выше сего примѣчено, и для того въ посылкѣ.

$$AB + CD : CD = OC : EC$$

будетъ $3 : 1 = 4000 : EC = 1333, 3 = SE$

откуду произойдетъ $OE = 2666.\ 7$ и уголъ $OES = 150°$, и для того будетъ въ посылкѣ.

$$OE + SE : OE - SE = \text{tang} \tfrac{1}{2} AOC : \text{tang} \tfrac{1}{2} (OSE - SOE)$$

l tang ½ AOC =	9.4280525
l OE − SE =	3.1249278
	12.5529803
l (OE + SE)	3.6020600
l tang ½ (OSE − SOE) =	8.9509203 = 5° 6′ 10″

Слѣдовательно уголъ $SOE = 20°\ 6'\ 10''$ и уголъ $AOS = 9°\ 53'\ 50''$. Чтобъ изъ оныхъ каждому опредѣлить уголъ соотвѣтствующей на горизонтѣ должно посылать.

$$\sin OAB : \cos OAC = \sin tot : \cos BOS$$

$$l \sin tot = 10.0000000$$
$$\cos AOS = 9.9934880$$
$$19.9934880$$
$$l \sin OAB = 9.9999338$$
$$l \cos BOS = 9.9935542 = 80^\circ\ 9'\ 10''$$

слѣдовательно уголъ BOS $= 9^\circ\ 50'\ 50''$. Потомъ

$$\sin ODC : \cos SOC = \sin tot : \cos SOD$$

$$l \sin tot = 10.0000000$$
$$l \cos SOC = 6.9727399$$
$$19.9727399$$
$$l \sin ODC = 9.9999835$$
$$l \cos SOD = 9.9727564 = 69^\circ\ 55'\ 1''$$

слѣдовательно уголъ SOD $= 20^\circ\ 4'\ 59''$

Примѣчаніе.

107) Изъ сихъ задачь сверьхъ особливаго ихъ употребленія видѣть можно, сколь велика погрѣшность произойти должна, ежели плоскость астролябіи будетъ имѣть къ горизонту наклоненіе на одинъ или на два градуса, и изъ предложенныхъ примѣровъ явствуетъ, что погрѣшность отсюду происходящую въ простой практикѣ безъ всякой опасности презрѣть можно.

КОНЕЦЪ.

ПОГРѢШНОСТИ.

стр.	строк.	напечатано	читай
10	26	тооъ	тобъ
15	8	чисто	часто
19	8	буаетъ	будетъ
23	1	66,9021	60,9021
29	13	чаетное	частное
33	12	15675	15674
34	10	71	72
36	посл.	знаки	знака
38	20	01,62	91, 62
	22.23.24	70192	70242
41	8	$5\frac{51}{604}$	$5\frac{51}{204}$
43	17	N=970894	670894
40	20	605,82	26, 34
47	23	54288+	52317+
51	посл.	оравненїе	сравненїе
52	9.13	сравненїе	содержанїе
55	19	коли	количества
57	11	B : A = C : D	B : A = D : C
59	21	B×D A×D	A×D
73	7	ломаное число	ломанаго числа
75	21. 23	$\frac{345}{755}$	$\frac{345}{759}$
76	16	A : B	B : A
80	21. 23	степьни	степени
84	20	30+5	30×5
113	15	26	16
116	10	2×10	3×10
122	3	всѣ	обѣ
125	17	вънедостатокъ	въ недостаткѣ
126	7	въ избыткѣ	въ недостаткѣ
	посл.	12	22

ПОГРѢШНОСТИ.

стр.	строк.	напечатано	читай.
127	23	погрѣшностей	положеній
134	12	27, 9	9, 27
135	9	M+2N	M+3N
136	8	A и B одинъ	A и B вмѣстить одинъ
137	1	$\frac{n^3P}{m^3}$ $\frac{n^3P}{m^3}$	$\frac{n_3P}{m_3}$ $\frac{n_4P}{m_4}$
142	10	употреблять. Можно	употреблять можно.
166	22	ABC	ACB
168	3	ADE	ADC
170	6	ожетъ	можетъ
172	7	раздѣленія	размѣренія
	28	точки C	точки A
177	16	AOB	AOC
178	14	ACB	acb
	20	b=CAB	b=CBA
180	26	на D	на C
181	22	бакамъ	бокамъ
185	посл.	AB и CD	HG и IK
186	20	IHD	+IHD
187	2	GKF	*вымарать*
	3	DKH	DKL
188	7	EML	EHD
190	1	линею AC	линею AB
	16	ACD+ABC +BCE	ACD+ACB +BCE
196	посл.	AED	ACD.
198	8	EDG	CDG
	посл.	бокъ AC	бокъ BC
205	11	CB	CE

стр.

погрѣшности.

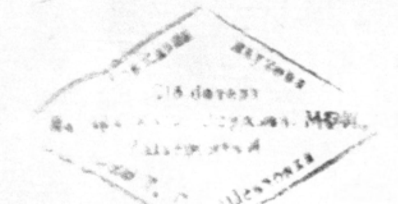
стр.	строк.	напечатано	читай
	12	ACB	ACE
207	5	рездѣлить	раздѣлить
208	5	углу ECA	углу FCA
210	6	или BO	или BH
216	5	2EAD	2 EDA
218	10	точка D	точка B
220	4. 16	двумъ прямымъ	четыремъ прямымъ
227	21	AL	AE
	24	EF	FI
248	10	AD: AB	AC: AB
256	4	равныя основанія имѣющіе	разныя основанія и высоты имѣющіе
259	23	то высота	то высота треугольниковъ
264	9	діаметръ	діаметръ круга
260	8	$\frac{ab.\,DE}{AB}$	$\frac{ab.\,DF}{AB}$
270	24	что	чтобъ
274	17	$_2CM^2$	CM^2
277	24	и ко всякой	и ко всякой линеѣ
284	15	фигуры	призьмы
289	10	треугольника	треугольникъ
296	25	есмь	есть
311	8	$\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}EB\times CL^2$	$\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}EB\times EL^2$
312	6	$\frac{\pi}{16}(2AB^3+EG^2)\times EB$	$\frac{\pi}{36}(2AB^2+EG^2)\times EB$

)(2 стр.

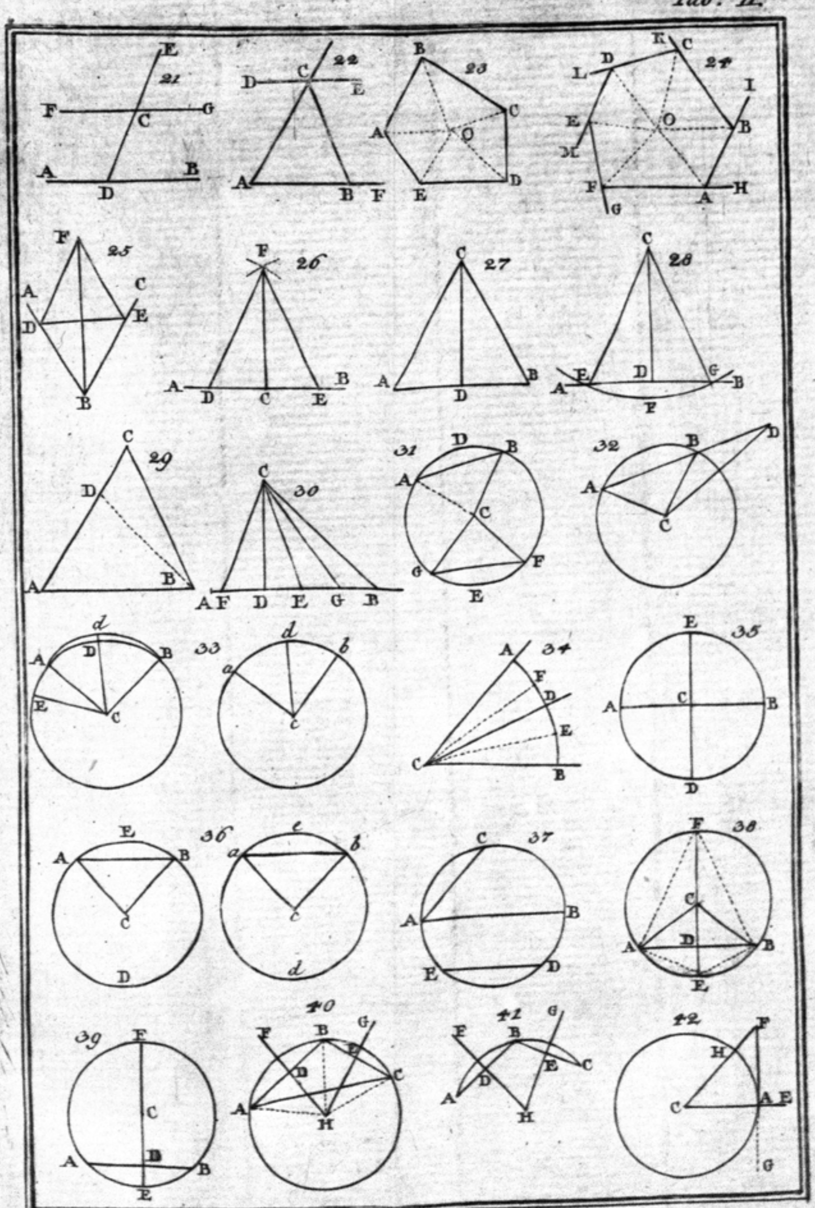
погрѣшности.

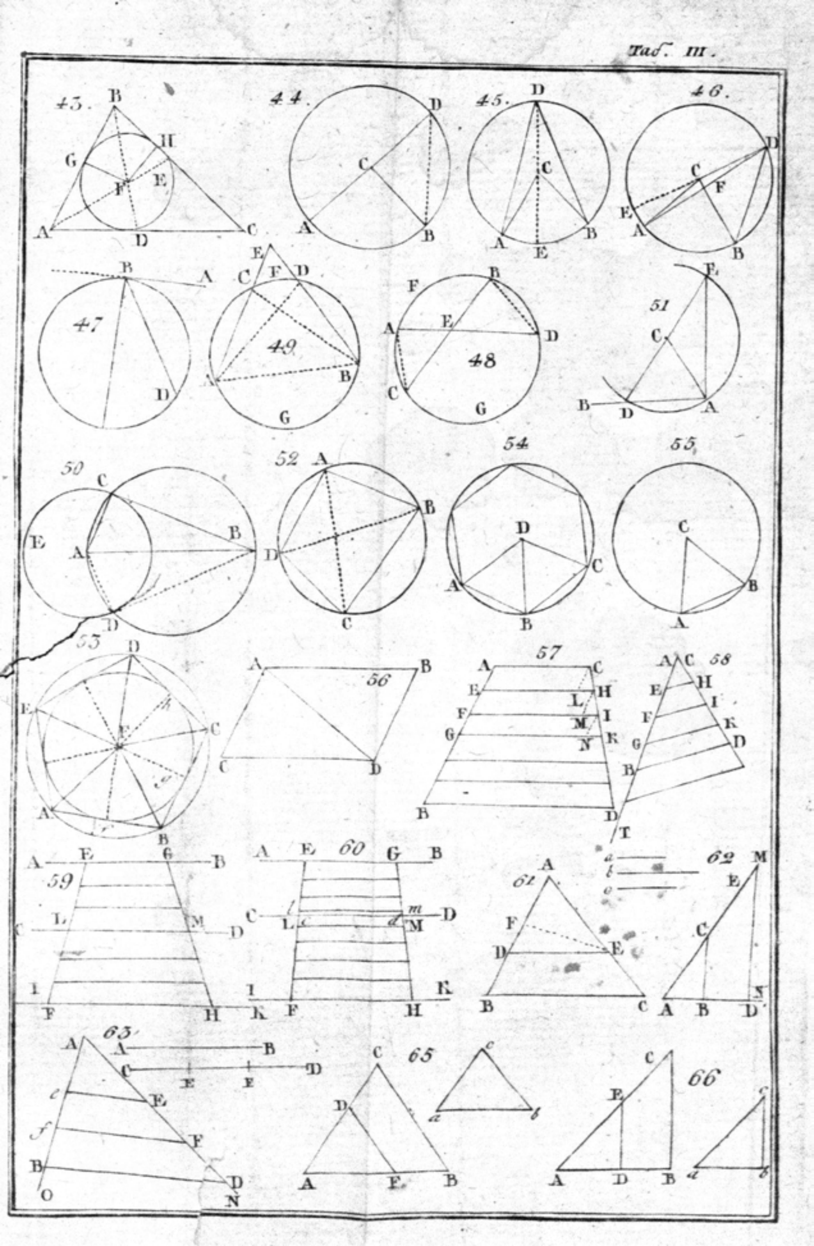
стр.	строк.	напечатано	читай
319	14	называется	назовется
	21	различать	различить
320	20	означается	означится
337	26	точное	точнѣе
382	9	Ноней	П нїй
	26	дїоптрѣ	дїоптрѣ
393	10	вымѣрять	вымѣряны
404	6	на большое	на бóльшее
410	16	мѣрѣ посылкою	мѣрѣ найдется посылкою
413	посл.	ерегу	берегу
414	21	точко	точка
	23	точку B	линею AB
418	5	въ ономъ	въ оныхъ
425	22	BBG	BAE
433	27	папередъ	напередъ

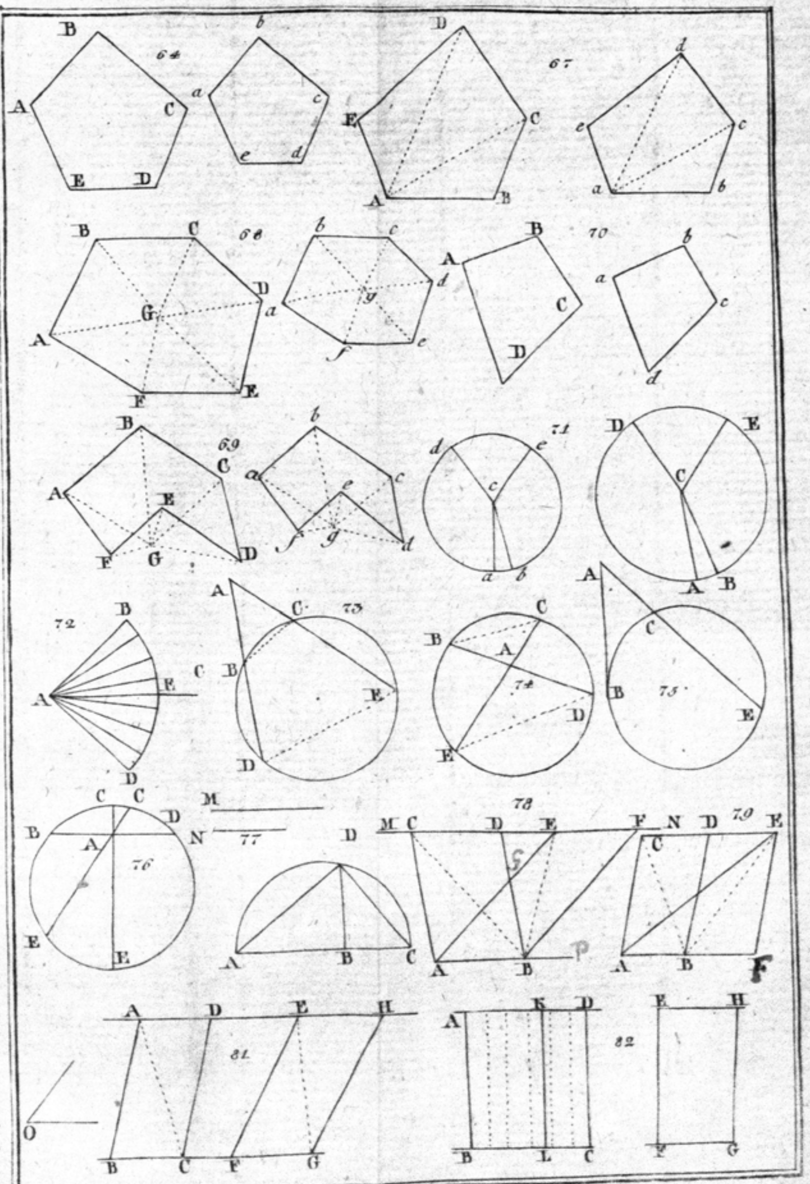
Протчїя погрѣшности, гдѣ вмѣсто *равныя данныя* количества или линеи, напечатано *равные данные* и симъ подобныя, благосклонный Читатель самъ исправить можетъ.



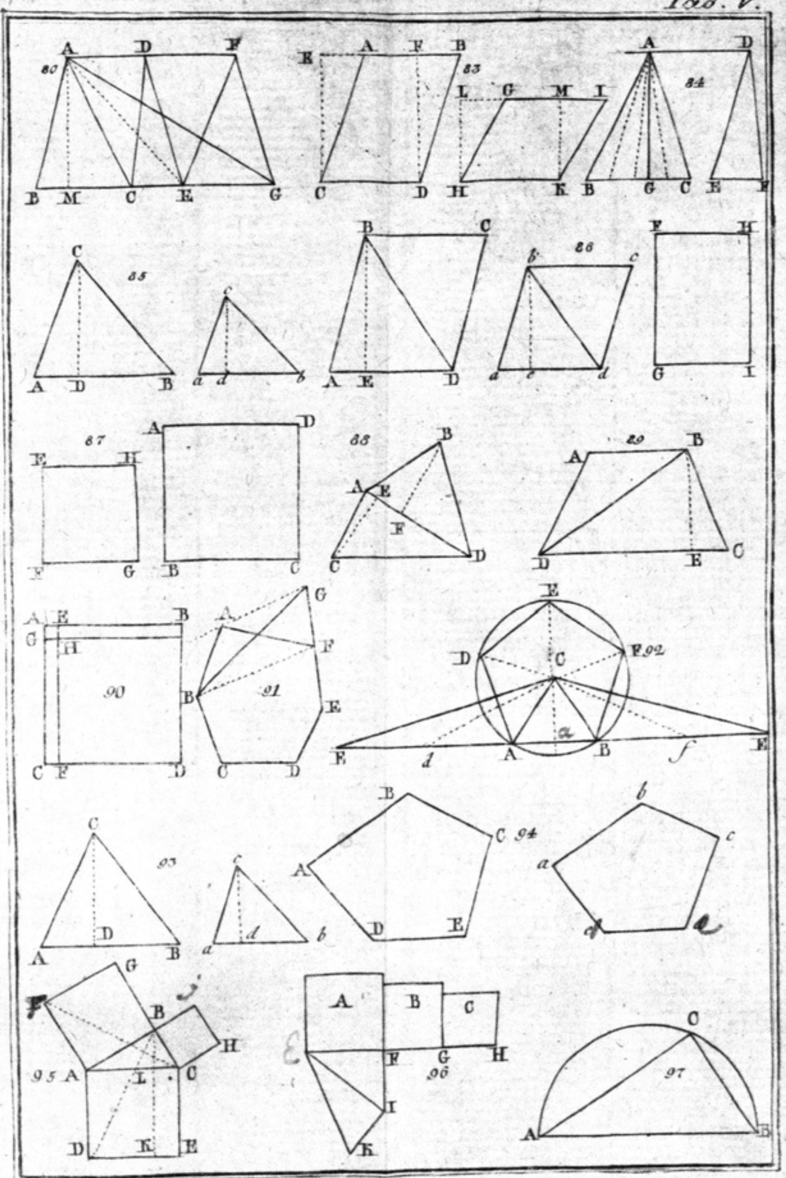
Tab: II.

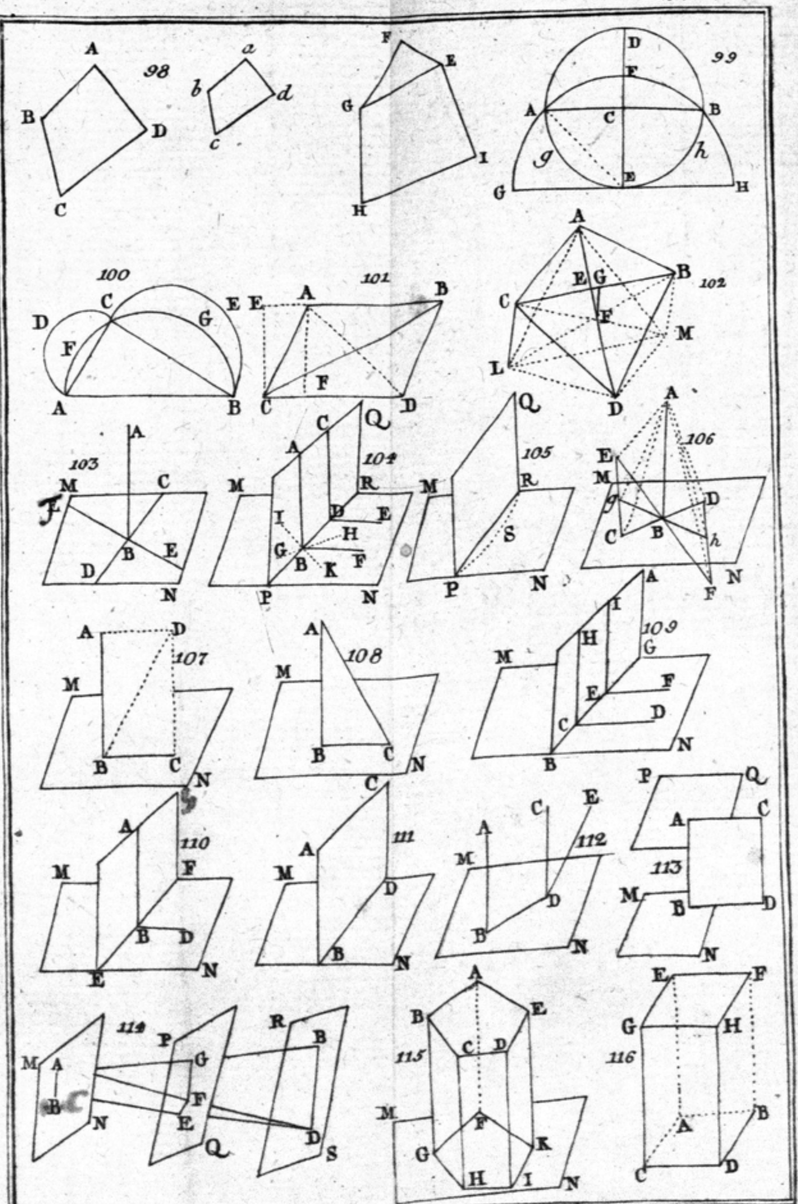


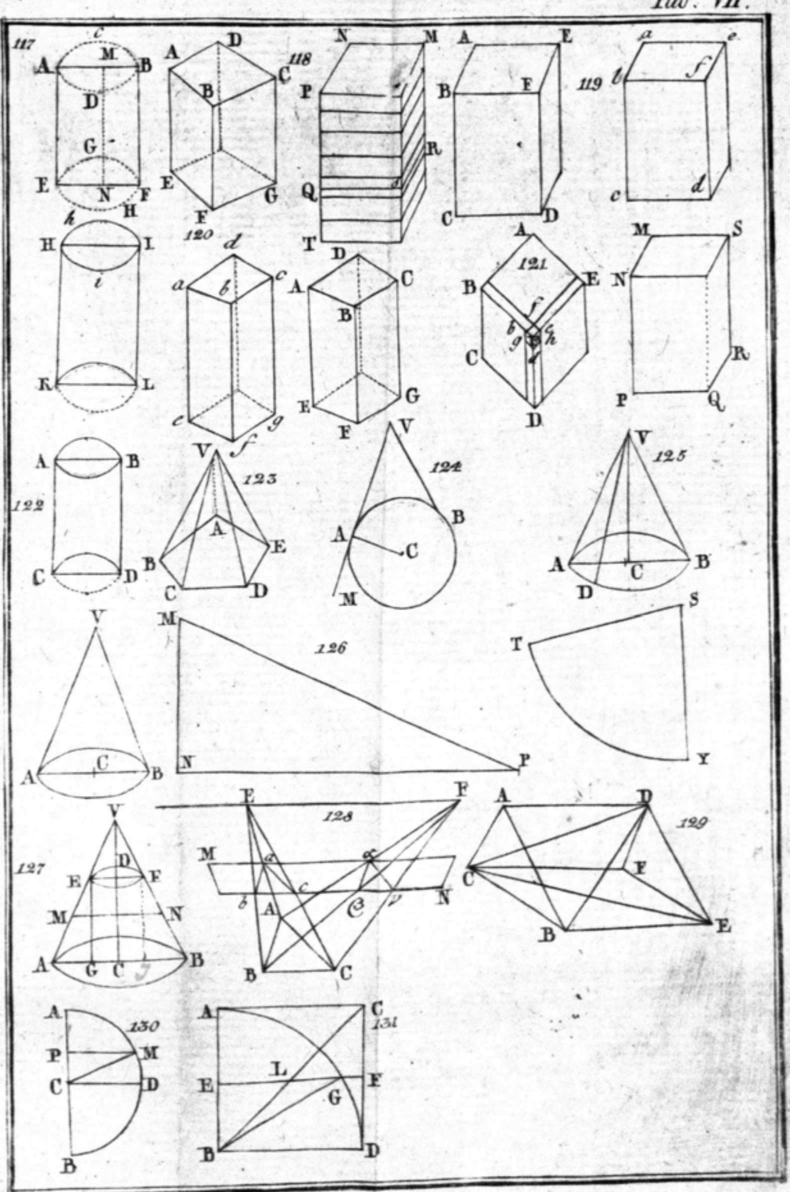



64
67
68
70
69
71
72
73
74
75
76
77
78
79
81
82

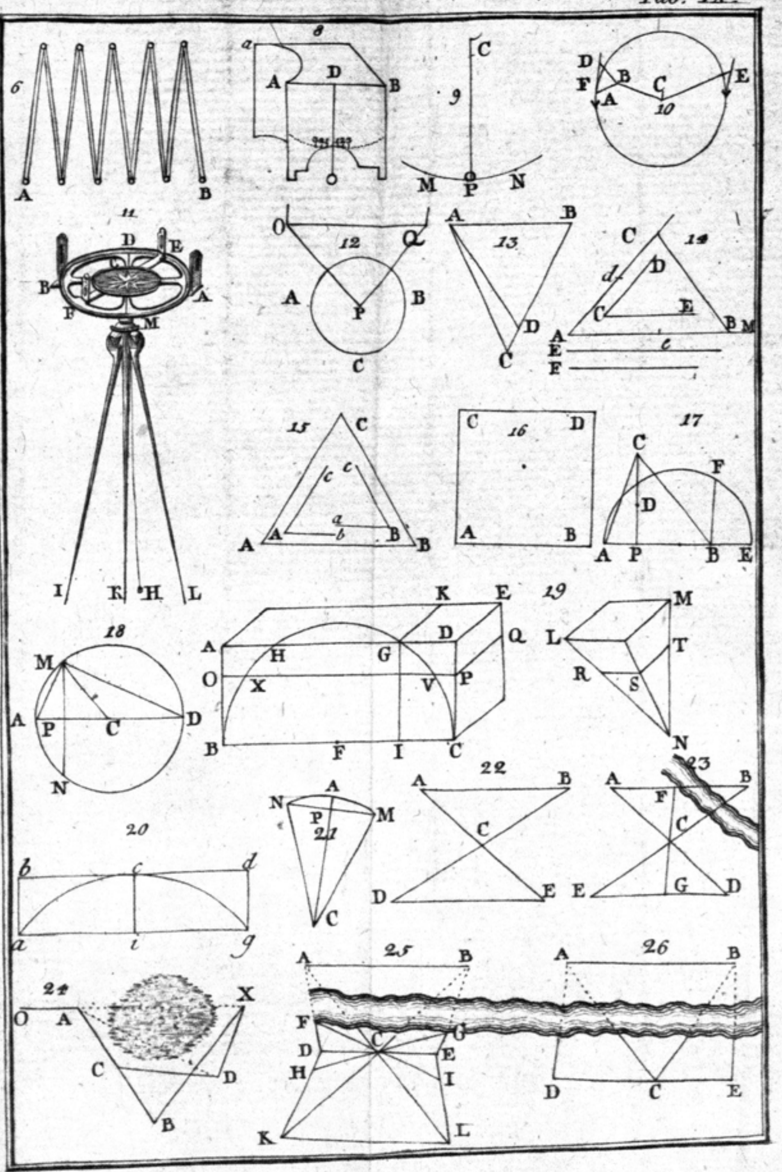
Tab. V.

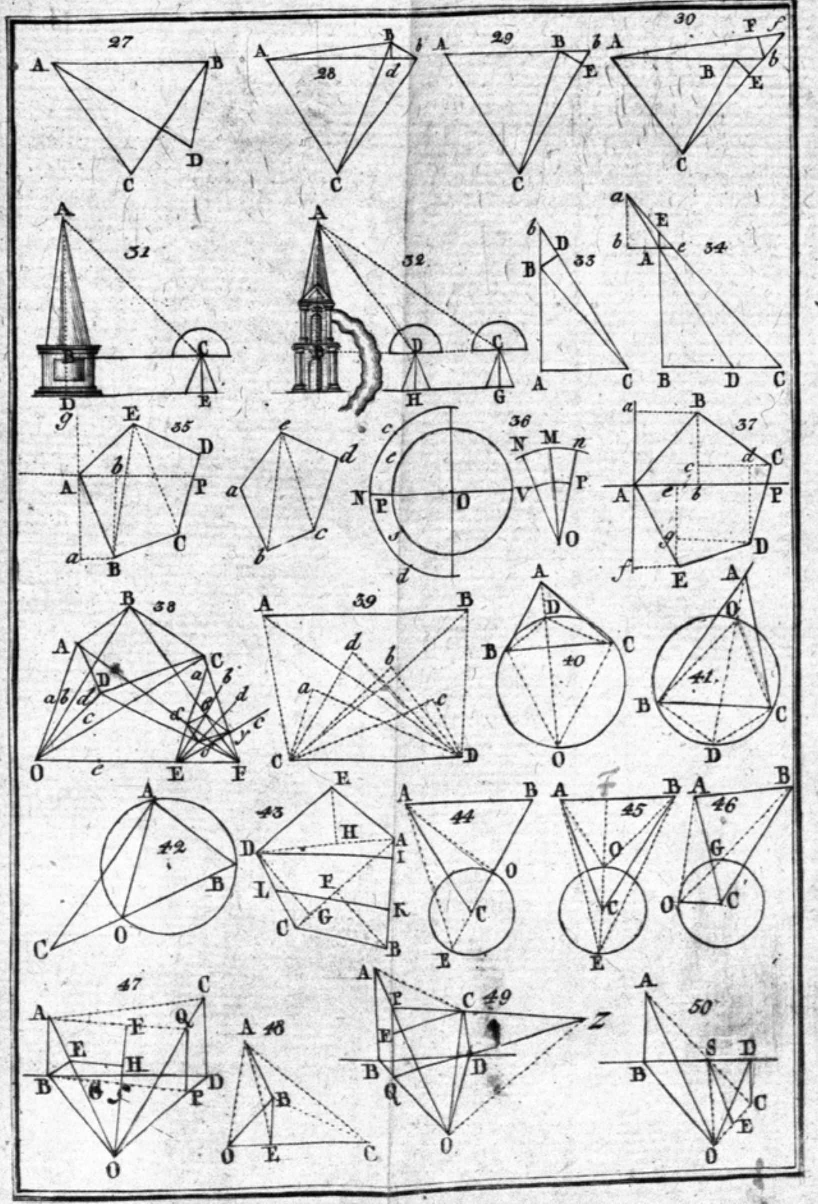



98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116


117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131

практ. Геом.


6
A
B
8
a
A
D
B
9
C
M
P
N
D
F
B
A
C
10
E
11
D
E
B
A
F
M
I
K
H
L
O
12
Q
A
P
B
C
A
B
13
D
C
C
14
D
d
C
E
A
B
M
E
c
F
15
C
c
c
A
a
b
B
A
B
C
D
16
A
B
17
C
F
D
A
P
B
E
18
M
A
P
C
D
N
K
E
A
H
G
D
Q
O
X
V
P
B
F
I
C
19
M
L
T
R
S
N
20
b
c
d
a
i
g
N
A
P
M
21
C
22
A
B
C
D
E
23
A
B
F
C
E
G
D
24
O
A
X
C
D
B
25
A
B
F
G
C
D
E
H
I
K
L
26
A
B
D
C
E


27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

плотщина шара, котораго діаметръ $D = \frac{\pi D^3}{12\delta}$ (§153); ибо $\delta : \pi = D : \frac{\pi D}{\delta}$ окруж. большаго круга; плоскость его $= \frac{\pi D^2}{4\delta}$ (§189); поверхность его $= \frac{\pi D^2}{\delta}$ (§277); толщина его будетъ $\frac{\pi D^3}{6\delta}$ (§274), слѣдовательно половина толщины $= \frac{\pi D^3}{12\delta}$; слѣдуетъ вмѣсто D положено будетъ $2AB$ толщина полушара отъ обращенія четверти круга ABC произшедшаго (фиг. 131) будетъ $\frac{2\pi AB^3}{3\delta}$ что ($\delta : \pi = 2AB : \frac{\pi 2AB}{\delta}$ окруж. основанія цилиндра, которая тогда умножится на $\frac{2AB}{4}$ [illegible] на $\frac{AB}{2}$ произведеніе площадь его круга $= \frac{\pi AB^2}{\delta}$; а умноживъ площадь его на высоту цилиндра $= AB$ найдемъ толщину цилиндра, которая будетъ $= \frac{\pi AB^3}{\delta}$; а когда толщина цилиндра умножится на $\frac{\delta}{2}$ получимъ толщину полушара $= \frac{2AB^3}{3\delta}$.) Отнявъ изъ сей толщины шара [illegible] найденую въ §279 толщину отъ обращенія фигуры AES произшедшую, которая будетъ $= \frac{2\pi AB^3}{3\delta} - \frac{\pi}{3\delta}(2AB^2 + ES^2) \times BE$; но $BE = AB - AE$, то будетъ $\frac{2\pi AB^3}{3\delta} - \frac{\pi}{3\delta}(2AB^3 \mp AB\,ES^2 - 2AB^2AE \pm ES^2AE)$

$= (2AB^2AE - AB\,ES^2 + ES^2AE)\frac{\pi}{3\delta} = \frac{2\pi AB^2AE}{3\delta}$

$- (AB - AE)\frac{\pi}{3\delta}ES^2 = \frac{2\pi}{3\delta}AB^2AE - \frac{\pi}{3\delta}ES^2BE.$

$$\begin{array}{l} 2AB^2 + ES^2 \\ AB - AE \\ \hline 2AB^3 + AB\,ES^2 - 2AB^2AE - AE\,ES^2 \end{array}$$

40

(§ 270.)

$\triangle AGE \sim \triangle ACV$ слѣд. $AG : AC = GE$ или $DC : VC$

$\triangle BFH$ также подоб. BVC и для того

$BH : BC = CD : CV$; а потому

$AG + BH : AC + BC = CD : CV$; но $AG + BH =$

$AB - EF$, а $AC + BC = AB$; слѣдовательно

$AB - EF : AB = CD : CV$ или $AB - EF : CD = AB : CV$.

$\delta : \pi = AB : \frac{\pi AB}{\delta}$ окруж. $\frac{\pi AB^2}{4\delta}$ площадь основанія конуса ABV;

$\frac{\pi AB^2 \times VC}{12\delta}$ толщина конуса; $\delta : \pi = EF : \frac{\pi EF}{\delta}$ окруж. другаго

основанія конуса FEV; $\frac{\pi EF^2}{4\delta}$ площадь основанія сего конуса; $\frac{\pi EF^2 VD}{12\delta}$

толщина; слѣдовательно толщина части отсѣченной конуса $AEFB$ будетъ $= \frac{\pi AB^2 \times VC}{12\delta} - \frac{\pi EF^2 VD}{12\delta} =$

$(AB^2 \times VC - EF^2 \times VD)\frac{\pi}{12\delta}$; но $VD = VC - DC$; потому будетъ толщина отсѣченной части $=$

$\left(\pi(AB^2 - EF^2) + EF^2 \times DC\right)\frac{\pi}{12\delta}$; а поскольку VC какъ выше

было найдено $= \frac{AB \times CD}{AB - EF}$, то толщина части отсѣченной

конуса $\frac{\pi}{12\delta}\left(\frac{AB \times CD(AB^2 - EF^2)}{AB - EF} + EF^2 \times CD\right) = \frac{\pi}{12\delta}\big(AB \times CD(AB + EF)$

$+ EF^2 \times CD\big) = (AB^2 + EF \times AB + EF^2)DC\,\frac{\pi}{12\delta}$.

$AB - EF \,)\, AB^2 - EF^2 \,(\, AB + EF$

$+ AB^2 - AB\,EF - EF$

$- EF - AB\,EF$

$- AB\,EF \pm EF$

---

5 $\delta : \pi = 2BD : \frac{\pi 2BD}{\delta}$ окруж. основ. цилиндра; $\frac{\pi 2BD^2}{2\delta}$ площадь основанія $= \frac{\pi BD^2}{\delta}$; $\frac{\pi}{\delta} BD^2 \times BE$ толщ. цилинд.; $\delta : \pi = 2EL : \frac{\pi 2EL}{\delta}$ окруж. основанія конуса; $\frac{\pi 2EL}{\delta} \times \frac{EL}{2} = \frac{\pi 2EL^2}{2\delta} = \frac{\pi EL^2}{\delta}$ площадь его основанія; $\frac{\pi EL^2}{\delta} \times \frac{BE}{3} = \frac{\pi EL^2 \times BE}{3\delta} = \frac{\pi}{\delta} \times \frac{1}{3} EL^2 \times BE$.

толщина конуса. Но $EL^2 = BE^2 = BG^2 - EG^2 = BD^2 - EG^2$, то

будетъ $\frac{\pi}{\delta}(BD^2 - EG^2)\frac{1}{3}BE$; слѣдовательно толщина части

$EBDG$ конуса, если изъ толщины цилиндра вычесть толщину конуса, потому она будетъ равна $\frac{\pi}{\delta} BD^2 \times BE - \frac{\pi}{\delta}(BD^2 - EG^2)$

$\times \frac{1}{3}BE$; а приведенія въ одну дробь знаменателя $= \frac{3\pi BD^2 \times BE - \pi BD^2 \times BE + EG^2 \times BE}{3\delta} = \frac{2\pi BD^2 \times BE + EG^2 \times BE}{3\delta} = \frac{\pi}{\delta}(2BD^2 + EG^2)\frac{1}{3}BE$.

ad pag. 446. примѣчанія: ∠ GCB = ∠ KCD.
уголъ ACG = углу AEB; а уголъ BCH = углу ABC
сверхъ того уголъ BCD = углу CBE; то отнявъ BCH
уголъ BCD и отъ угла ABC равный ему угла
ABE, ~~разность~~ будетъ углы DCH = ABE ~~[illegible]~~
= AEB; но уголъ AEB = ∠ ACD, слѣдовательно
∠ DCH = ∠ DCA.

ad pag. 155. $\left(\frac{106}{100} + \frac{106 \times 6}{(100)^2}\right) 300000$

$$\frac{(100)^2 \times 106 + 106 \times 100 \times 6}{(100)^3} = \frac{100 \times 106 + 106 \times 6}{(100)^2}$$

$$\frac{(100+6)100 + (100+6)6}{(100)^2} = \left(\frac{106}{100}\right)^2$$

къ стр. 272.

пересѣкъ: AEB = ADBFA =
AGEG + BKEH

Секторъ AEBF = $\frac{1}{2}$ площади
полукруга GABH; и части сего
полукруга AGE + BEH = $\frac{1}{2}$ также
равны половинѣ; ~~[illegible]~~ слѣдъ
отъ равныхъ пересѣченіе ABE;
будетъ сегментъ AEBF = AGE + BEK;
слѣдовательно по отнятіи сегмента
ABFA и отъ равныхъ ему AGE + BEK, Δ ABE будетъ
равенъ ADBFA или AGEG + BKEH, какъ было
означено.

